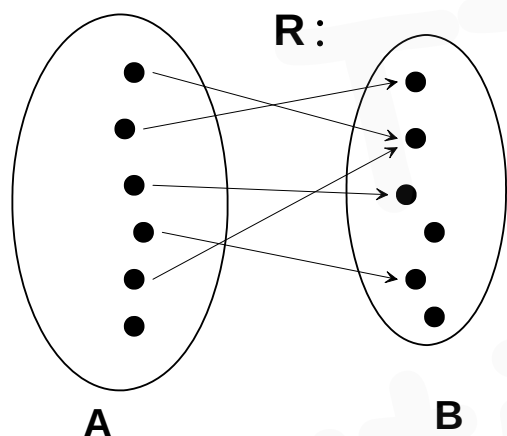


## VASTAVUSED

*vastavused "ühest hulgast teise hulka"*

Hulkadega tegelemisel esineb olukordi, kus mingi hulga  $A$  elementidele tuleb seada vastavaks teise hulga  $B$  elemente — misjuhul tekib hulkadevaheline (mingi) **vastavus** ("seos") (ingl. *relation*).

Vastavuste tähistamiseks kasutame tavaliselt tähti:  $\varphi$   $R$



mingi vastavuse  $R$  diagramm

Olgu 2 (mittetühja) hulga  $A$  ja  $B$ .

**Vastavus** esitab / määrab, millised ühe hulga ( $B$ ) elemendid vastavad mingi teise hulga ( $A$ ) mingitele elementidele.

Seostatud elementide selliseid paare nimetatakse *järjestatud paarideks* ja esitatakse  $\langle a, b \rangle$ .

"Järjestatud" rõhutab fakti, et selles paaris on  $a$  "esimesena" ja  $b$  on "teisena": järjestatus kehtib "paari sees".

Olgu  $a \in A$   $b \in B$

kui element  $b$  "vastab" elemendile  $a$  (mingi vastavuse  $R$  kohaselt) siis selle fakti väljendamiseks koostame *järjestatud paari*:

$\langle a, b \rangle$  ja see paar ise on elemendiks (järjestatud paaride) hulgas  $R$ :

$$\langle a, b \rangle \in R$$

Samuti ütleme: " $R$  on vastavus hulgast  $A$  hulka  $B$ "

Olles defineeritud *järjestatud paaride* hulgana, seostub vastavus seeläbi ka hulkade *otsekorrutise* mõistega — mis oli samuti järjestatud komponentide (*korteežide*) hulk.

Iga vastavus  $R$  (hulgast  $A$  hulka  $B$ ) on nende hulkade *otsekorrutise*  $A \times B$  osahulk:

$$R \subset A \times B$$

Visuaalselt saab vastavust hästi esitada *vastavuse diagrammiga*:

┌ näide: \_\_\_\_\_ ┘

Olgu tudengite hulk  $A$ :

$$A = \{ \text{Jüri} \quad \text{Mari} \quad \text{Juhan} \quad \text{Jaan} \quad \text{Kati} \quad \text{Mati} \}$$

.... ja võimalike hinnete hulk  $B$ :

$$B = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5 \}$$

Eksmil teatavasti "omistatakse igale tudengile üks konkreetne hinne" — mis tähendab samas ka mingi vastavuse tekitamist hulgast  $A$  hulka  $B$  mida saab esitada *vastavuse diagrammiga*:

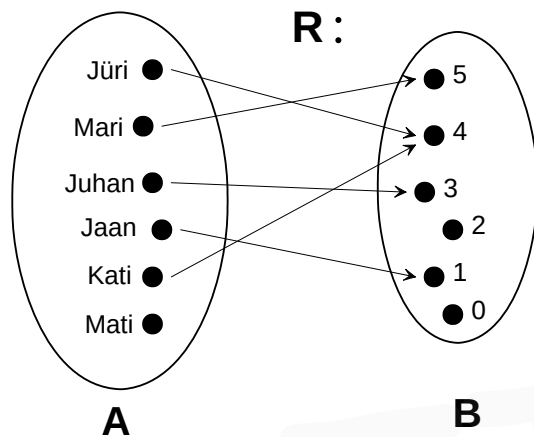


diagramm (mingile) vastavusele  $R$  hulgest A hulka B

Väikeste hulkade vahelisi *vastavusi* on kõige eelistatum esitada just selliste diagrammidena.

Kuna vastavus omaks justnagu "suunda" hulgest A hulka B, siis väljendatakse teda ka kirja pildiga :

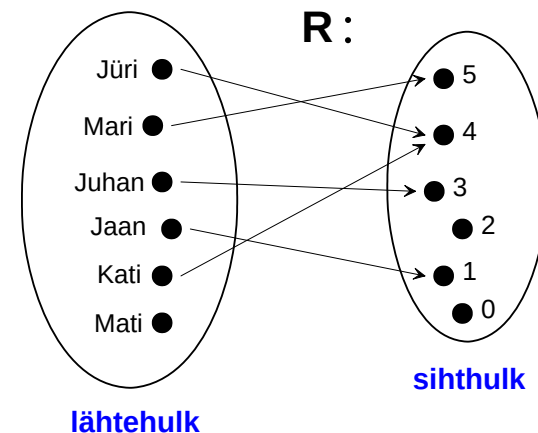
$$R: A \rightarrow B$$

(*oluline* : sümbol  $\rightarrow$  ei tähenda siin loogikatehet *implikatsioon* nagu mäletame implikatsiooni tehtemärgiks loogikas; nool näitab siin ainult "suunda A-st B-sse" )

Omades vastavuse  $R$  koosseisus sellist rolli / staatust nagu eelnev diagramm näitab,

hulka  $A$  nimetatakse vastavuse  $R$  **lähtehulgaks** ;

hulka  $B$  nimetatakse vastavuse  $R$  **sihthulgaks** ;



Mäletame varasemast, et *otsekorrutis*  $A \times B$  sisaldab k ö i k i võimalikke *järjestatud paare*  $\langle a, b \rangle$  nende hulkade elementidest, kuid *vastavus*  $R: A \rightarrow B$  sisaldab tavaliselt ainult osasid paare nendest, olles nende hulkade *otsekorrutise* osahulk :  $R \subset A \times B$

Meie näitevastavus  $R$  eelneval diagrammil on tegelikult (ja saab olla esitatud) sellise *järjestatud paaride* hulkana :

$$R = \{ \langle \text{Jüri}, 4 \rangle \langle \text{Mari}, 5 \rangle \langle \text{Juhan}, 3 \rangle \langle \text{Jaan}, 1 \rangle \langle \text{Kati}, 4 \rangle \}$$

Kui " $a$  jaoks on seatud vastavaks  $b$ " ehk  $\langle a, b \rangle \in R$  siis saame ka väljendada :

$$a R b$$

### Vastavuse TÄIEND

Vastavuse  $R$  **täiend**  $\overline{R}$  sisaldab kõiki (ülejäanud) *järjestatud paare*

$\langle a, b \rangle \in A \times B$  mis puuduvad vastavuses  $R$ .

Eelnev *verbaalne* selgitus omab *formaalset* ekvivalenti :

$$\overline{R} = \{ \langle a, b \rangle \in A \times B \mid \langle a, b \rangle \notin R \} \subset A \times B$$

(võime märgata, et meie vastavuse  $R$  jaoks  $\overline{R}$  sisaldab 31 järjestatud paari )

Märkame, et vastavuse täiend on sarnane hulga täiendiga — kui oleme defineerinud ( $R$  jaoks) *universaalhulgaks* nende hulkade otsekorrutise  $A \times B$

vastavuse  $R$  ja tema täiendi  $\overline{R}$  jaoks kehtib :

$$\overline{R} = (A \times B) \setminus R$$

$$|\overline{R}| = |A \times B| - |R|$$

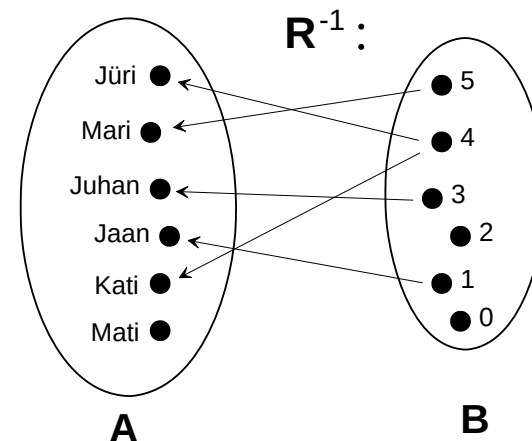
## PÖÖRDVASTAVUS

Vastavuse  $R : A \rightarrow B$  pöördvastavus  $R^{-1}$  on vastavus, kus lähtehulk ja sihthulk on "oma rollid äravahetanud" ehk vastavus on kehtestatud hulgast  $B$  hulka  $A$ .

Kõik järjestatud paarid  $\langle a, b \rangle$  mis kuuluvad vastavusse  $R$  — on pöördvastavuses vahetanud oma komponentide järjekorra vastupidiseks :  $\langle b, a \rangle$

Niisiis  $R^{-1}$  on vastavus hulgast  $B$  hulka  $A$ , säilitades endiselt samad hulgaelemendid teineteisega seostatuna (kuid "vastupidises suunas") :

$$R^{-1} = \{ \langle b, a \rangle \in B \times A \mid \langle a, b \rangle \in R \} \subset B \times A$$



pöördvastavus meie algse vastavuse  $R$  jaoks

$$|R^{-1}| = |R|$$

┌ näide:

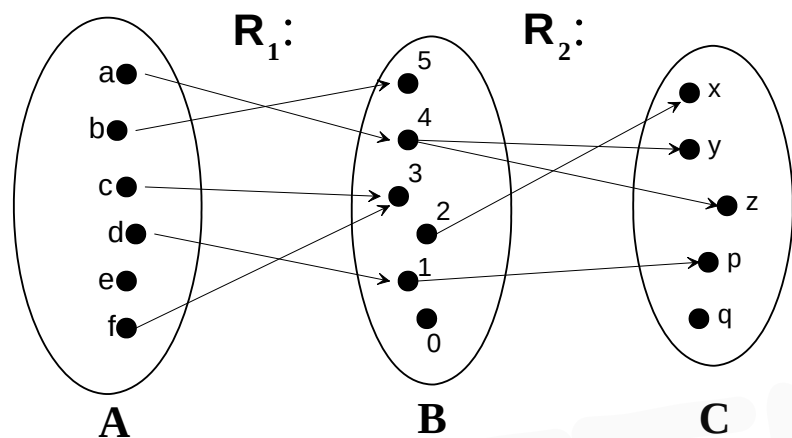
kui  $R = \{ \langle 1, a \rangle \langle 2, d \rangle \langle 4, b \rangle \}$  siis  $R^{-1} = \{ \langle a, 1 \rangle \langle d, 2 \rangle \langle b, 4 \rangle \}$

## Vastavuste KOMPOSITSIOON

Olgu 2 vastavust  $R_1 : A \rightarrow B$  ja  $R_2 : B \rightarrow C$

Kompositsioon  $R_1 \cdot R_2$  on vastavus hulgast  $A$  hulka  $C$  "üle hulga  $B$  vahepealsete elementide" :

$$R_1 \cdot R_2 = \{ \langle a, c \rangle \in A \times C \mid \exists b \in B (\langle a, b \rangle \in R_1 \wedge \langle b, c \rangle \in R_2) \} \subset A \times C$$



eel-illustratsioon kompositsioonile  $R_1 \cdot R_2$

$$R_1 \cdot R_2 = \{ \langle a, y \rangle, \langle a, z \rangle, \langle d, p \rangle \}$$

Tunne ära, et

binaarne tehe **kompositsioon** on *assotsiatiivne* :

$$(R_1 \cdot R_2) \cdot R_3 = R_1 \cdot (R_2 \cdot R_3)$$

kompositsiooni pöördvastavus on pöördvastavuste kompositsioon :

$$(R_1 \cdot R_2)^{-1} = R_2^{-1} \cdot R_1^{-1}$$

Kompositsiooni võib vaadelda / alternatiivselt nimetada ka vastavuste korrumamiseks .

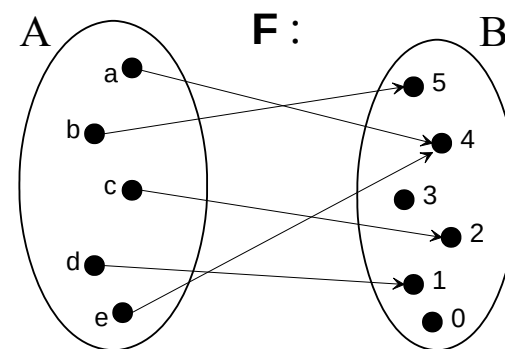
## Funktsioonid

Üks vastavuste tüüp omab kõikjal matemaatikas tähtsat rolli.

Kõik erinevad funktsioonid mida oleme näinud nii põhikoolis kui ka ülikoolis ... on samuti teatud kindlate omadustega vastavused.

Verbaalselt kirjeldatuna :

(Mingi) vastavus on **funktsioon**, kui igale lähtehulga elemendile vastab täpselt üks element siht hulgas.



suvaline näide vastavusest mis on **funktsioon**

Tavalise üldise tähise **R** asemel võime eelistada funktsioonide esitamisel tähti **F** (ja **f**).

Funktsioon omab ka alternatiivset terminit : "*kujutus*" ja siht hulga elementi (mis vastab lähtehulga mingile elemendile) — saab nimetada : "*kujutis*".

Funktsiooni *formaalne* definitsioon sobib olema kujul :

♦ Vastavus  $F \subset A \times B$  on funktsioon, kui

$$\forall a \in A \exists ! b \in B [ \langle a, b \rangle \in F ]$$

Olgu endiselt lähtehulk **A** ja siht hulk **B**.

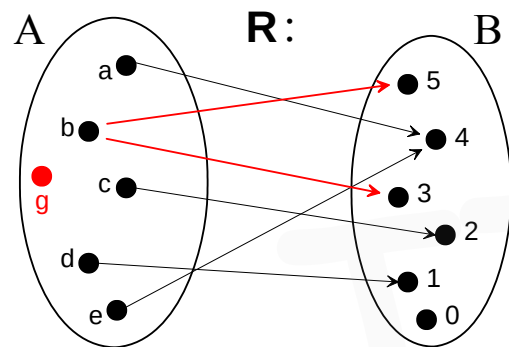
Märgime, et funktsiooni siht hulgas (**B**) tohib olla elemente, mis "ei osale" funktsioonis.

Lähtehulga elemendid mis "osalevad" funktsioonis **F**, moodustavad funktsiooni määramispiirkonna.

Siht hulga elemendid mis "osalevad" funktsioonis **F**, moodustavad funktsiooni muutumispiirkonna.

( eelmises näites muutumispiirkond on :  $\{ 1, 2, 4, 5 \}$  )

Näeme, et funktsioonide korral on lubatud ainult "ühesed seosed" (ingl.: "one-to-one" relationships) lähtehulgast sihthulka ning ei ole lubatud "mitmesed seosed" (ingl.: "one-to-many" relationships) lähtehulgast sihthulka:



suvaline näitevastavus : **POLE funktsioon**

"üks-mitmele" seosed (punased nooled siin diagrammil) saavad olla funktsiooni  $F$  jaoks välistatud ka sellise formaalse määratlusega:

$$\forall a \in A \forall y, z \in B ( \langle a, y \rangle \in F \wedge \langle a, z \rangle \in F \rightarrow y = z )$$

Element **g** lähtehulgas  $A$  (mis ei osale siin vastavuses  $R$ ) ei ole siiski "probleem funktsiooni jaoks": me võime alati defineerida vastavuse *lähtehulga* nii, et selle hulga moodustavad justnimelt need elemendid, mis tõesti osalevad vastavuses / funktsioonis.

Siin näites oleks selliseks (algse suhtes vähendatud) *lähtehulgaks*:

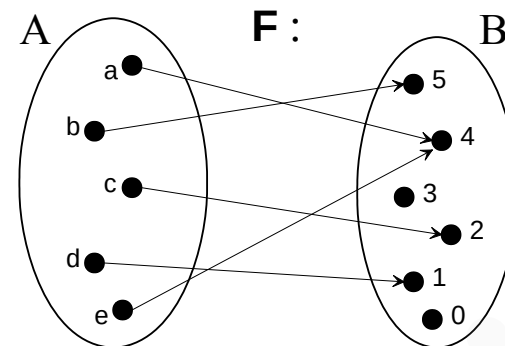
$\{ a, b, c, d, e \}$

... misjuhul me ikkagi omame lähtehulga **i g a** elemendi jaoks vastavat *sihthulga* elementi.

Kuid järjestatud paarid  $\langle b, 5 \rangle$   $\langle b, 3 \rangle$  (punased nooled diagrammil) esitavad jätkuvalt "probleemi", mis välistab selle vastavuse  $R$  funktsioonide hulgast: "üks-mitmele" seosed *lähtehulgast* *sihthulka* — ei ole lubatud funktsioonides.

Kui vastavus  $F$  on *funktsioon*, siis *kompositsiooni*  $F^{-1} \cdot F$  tulemus on:

$$F^{-1} \cdot F = \{ \langle b, b \rangle \mid b \in B \}$$



veelkord sama näitevastavus : (mingi) **funktsioon**

Kui  $f$  on *funktsioon* ja  $\langle x, y \rangle \in f$  siis võime ka esitada:

$$f(x) = y \quad \text{ja} \quad y = f(x)$$

.... millega olemegi jõudnud tuttavate tähistusteni, mida oleme harjunud nägema funktsioonide juures kõikjal matemaatikas ...

Siin,  $x$  omab nime / staatust "funktsiooni **argument**" ja  $y$  nimetatakse "funktsiooni **väärtuseks**" (selle argumenti korral)

Niisiis — tegeledes *funktsioonidega*, me eelistame nimetusi:

$$f(\text{argument}) = \text{väärtus}$$

## Funktsioonide TÜÜBID

Lähtudes *funktsioonide* omadustest, saab funktsioone liigitada 4 tüübiks: *injektsioon* *sürjektsioon* *bijektsioon* ....

## injeksioon

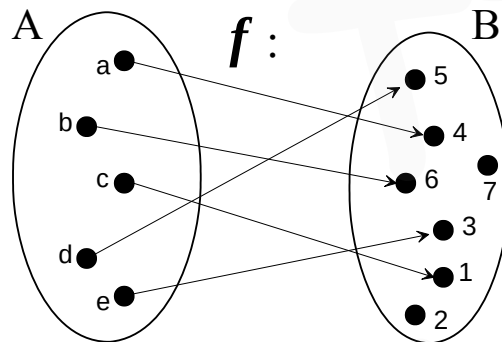
verbaalse kirjeldusena :

♦ Funktsioon  $f: A \rightarrow B$  on **üks-ühene** (ingl. "one-to-one") ehk **injektiivne** kui muutumispiirkonna iga element (sihthulgas  $B$ ) vastab täpselt ühele määramispiirkonna elemendile.

formaalse definitsioonina :

$\forall a, b \in A [ f(a) = f(b) \rightarrow a = b ]$  või alternatiivne samaväärne :

$\forall a, b \in A [ a \neq b \rightarrow f(a) \neq f(b) ]$



**injeksioon** : üks-ühene funktsioon

**injeksioon** : muutumispiirkonnas pole ühtki sellist elementi, kuhu "saabuks" diagrammil mitu noolt.

kui  $f: A \rightarrow B$  on **injeksioon**, siis  $|A| \leq |B|$

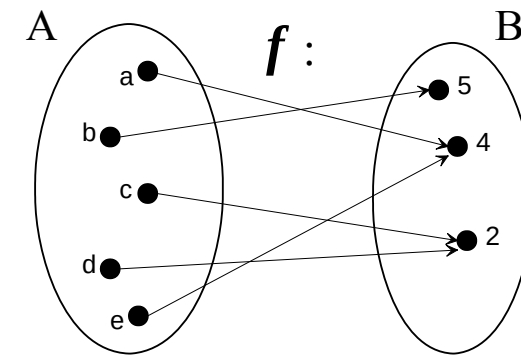
## sürjektsioon

verbaalselt :

♦ Funktsioon  $f: A \rightarrow B$  on **sürjektiivne** kui iga element muutumispiirkonnas vastab mingile elemendile / elementidele määramispiirkonnast.

formaalselt :

$$\forall b \in B \exists a \in A [ f(a) = b ]$$



**sürjektsioon** : ka "pealekujutus"

**sürjektsiooni** korral : muutumispiirkond võrdub (kogu) sihthulgaga ( $B$ ) (ehk : sihthulga kõik elemendid osalevad funktsioonis / vastavuses )

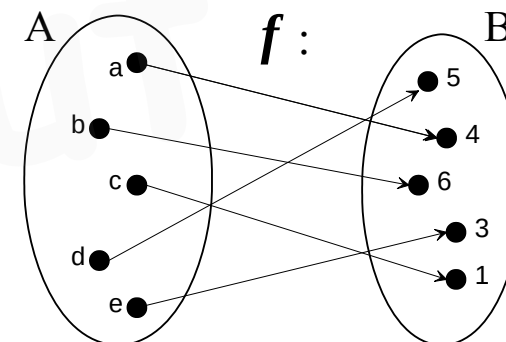
... ja "mitu ühele" (ingl. "many-to-one") vastavuspaarid (nooled diagrammil) on lubatud **sürjektsioonis**.

## bijektsioon

verbaalselt :

♦ Funktsioon  $f: A \rightarrow B$  on **bijektsioon**, kui ta on samaaegselt nii **injeksioon** kui ka **sürjektsioon**

Kuigi oleks võimalik, siis me ei pea vajalikuks koostada *formaalset* definitsiooni **bijektsiooni** jaoks.



**bijektsioon** : on samaaegselt nii **injeksioon** kui ka **sürjektsioon**

Kui  $f: A \rightarrow B$  on bijektsioon, siis  $|A| = |B|$

Siin näites:  $|A| = |B| = 5$

### graafide isomorfism ja bijektsioon

meenutame graafe:

Kirjeldades isomorfeid graafe, sõnastasime nende kohta nii: iga tipp ja kaar ühes graafis peab omama endale vastavat ühte tippu või kaart (teises) isomorfses graafis.

Bijektsiooni abil saame nüüd defineerida graafide isomorfismi korrektsema (verbaalse) sõnastusega:

2 graafi on isomorfsed, kui eksisteerib (on võimalik luua) bijektsioon nende tippude hulkade vahel ja samuti bijektsioon nende kaarte hulkade vahel, nii et vastavad kaared ühendavad vastavaid tippe (mõlemas graafis).

Oleme esitanud 3 funktsioonide tüüpi: injektsioon sürjektsioon bijektsioon



?... kuid eelnevalt oli üteldud: funktsioone on 4 tüüpi?

Viimane ehk "neljas funktsioonide tüüp" on kõik ülejäänud funktsioonid, mis pole mitte ükski nendest kolmest.

Nemad on lihtsalt "funktsioonid".

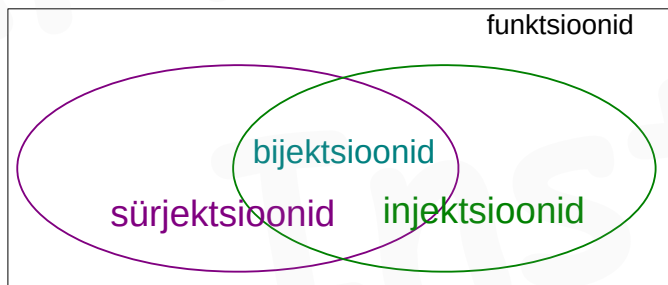
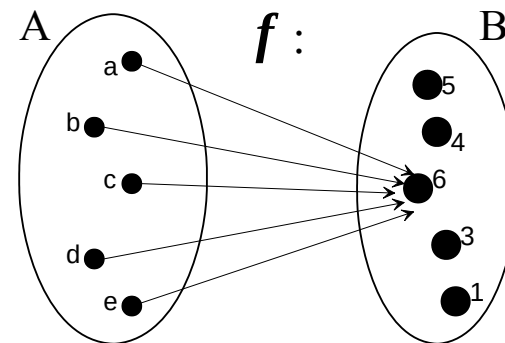


diagramm funktsioonide tüüpidest

### konstantne funktsioon

Konstantne funktsioon kujutab kogu määramispiirkonna üheksainsaks konkreetseks sihthulga elemendiks: ("funktsiooni väärtus ei muutu")



konstantne funktsioon

muutumispiirkonnaks on üksainus sihthulga element.

ülesanne:



On vastavus  $\varphi: A \rightarrow B$  kus  $A$  on tudengite hulk ja  $B$  on eksamilsaadud hinnete hulk:

$$B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

Vastavus  $\varphi$  näitab, millise hinde sai iga tudeng eksamil.

Kirjelda (verbaalselt) olukorda, kus vastavus  $\varphi$  on ....

— bijektsioon?

— injektsioon? (aga pole samas ei bijektsioon ega sürjektsioon)

— sürjektsioon? (aga pole samas ei bijektsioon ega injektsioon)



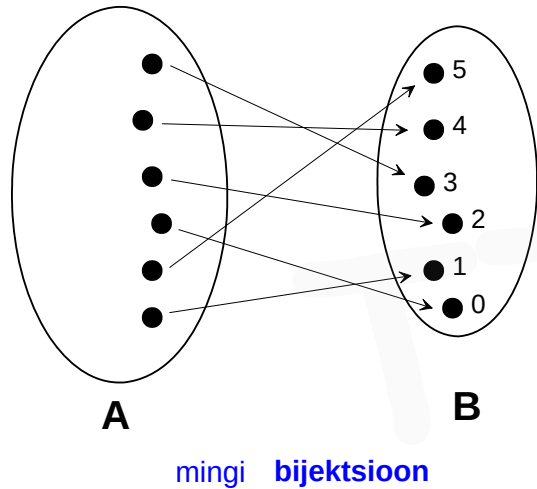
— bijektsioon:

osaleb täpselt 6 tudengit ja igaüks nendest saab erineva hinde; teiste sõnadega:



iga hinne  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$  on omistatud kellelegi täpselt ühekorra;

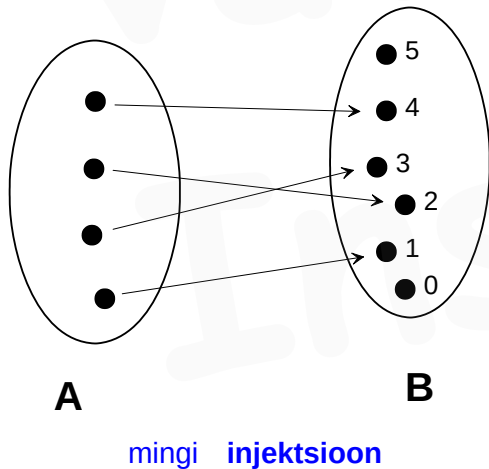
... *bijektsiooni* illustreerimiseks sobib seesama *lätehulk* ja *sihthulk* mis meil oli :



— **injektsioon** :

osaleb vähem kui 6 tudengit ja igaüks nendest saab erineva hinde;

"piiripealsel juhul" : 6 tudengit sobib kah osalema *injektsiooni* jaoks (kuna hindeid leidub 6 erinevat) — kuid seljuhul moodustub *injektsioon* mis on samaaegselt ka *bijektsioon*.



— **sürjektsioon** :

tudengeid ehk osalejad võib olla suvaline arv (vähemalt 6 või enam) ja iga konkr. hinne  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$  on omistatud (vähemalt ühekorra) kellelegi ;

teiste sõnadega :

mitte ükski hinne  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$  ei jää eksamil omistamata.

"piiripealsel juhul" : 6 tudengit sobib kah osalema *sürjektsiooni* jaoks (kuna hindeid leidub 6 erinevat) — kuid seljuhul moodustub *sürjektsioon* mis on samaaegselt ka *bijektsioon*.

