## Loogikatehete asendusseosed

*Asendusseosed* asendavad *mitteelementaarseid* loogikatehteid

*implikatsioon:* $\rightarrow$
*ekvivalents:* $\leftrightarrow$
*summa mooduliga 2:* $\oplus$ ( ka *"välistav VÕI"* *XOR* )
( *see tehe on käsitletud edaspidi* )

...elementaarsete loogikatehete (*inversioon*, *disjunktsioon*, *konjunktsioon*) kaudu:

**implikatsiooni** asendusseos :

$$x \rightarrow y \;=\; \bar{x} \vee y$$

( *kontrollida tõeväärtustabelite võrdlemise teel* ! )

*ülesanne:*

Kontrolli **tõeväärtustabelite võrdlemise teel**, kas

$$x_1 \rightarrow x_2 \;=\; \bar{x}_1 \vee x_2 \quad ?$$

meenutuseks *implikatsiooni* tõeväärtustabel :

| | inversioon | konjunktsioon | disjunktsioon | **implikatsioon** | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_1\ x_2$ | | | | $x_1 \rightarrow x_2$ | $\bar{x}_1 \vee x_2$ |
| 0 0 | 1 | 0 | 0 | **1** | ? |
| 0 1 | 1 | 0 | 1 | **1** | ? |
| 1 0 | 0 | 0 | 1 | **0** | ? |
| 1 1 | 0 | 1 | 1 | **1** | ? |

seega :

$$x_1 \rightarrow x_2 \;=\; \bar{x}_1 \vee x_2$$

**ekvivalentsi** asendusseosed :

*meenutame :*

**ekvivalentsi** korral on mõlemad tema operandid samaaegselt teineteise *eelduseks* ja *järelduseks* :

$$x \leftrightarrow y \;=\; (x \rightarrow y)(y \rightarrow x)$$

eelnev võrdus ongi kasutatav **ekvivalentsi** ühe võimaliku asendusseosena;

*ülesanne:*

Püüa tuletada **ekvivalentsi** jaoks veel üks *asendusseos*, teisendades edasi avaldist :

$$x \leftrightarrow y \;=\; (x \rightarrow y)(y \rightarrow x) \;=\; \ldots$$

. . . . kasutades **implikatsiooni** eelpoolset *asendusseost* :

$$x \rightarrow y \;=\; \bar{x} \vee y$$

. . . . ja sulgude järgnevat lahtikorrutamist.

asendades mõlemad **implikatsioonid** tema *asendusseosega*

$$x \rightarrow y \;=\; \bar{x} \vee y$$

. . . saame teisendada :

$$x \leftrightarrow y \;=\; (x \rightarrow y)(y \rightarrow x) \;=\; (\bar{x} \vee y)(\bar{y} \vee x) \;=$$

$$=\; \bar{x}\bar{y} \vee y\bar{y} \vee \bar{x}x \vee yx \;=$$

$$=\; \bar{x}\bar{y} \vee 0 \vee 0 \vee yx \;=\; \bar{x}\bar{y} \vee xy$$

. . . seega oleks *ekvivalentsi* eelistatuim asendusseos (kohe DNK-kujule) :

$$x \leftrightarrow y \;=\; \bar{x}\bar{y} \vee xy$$

**?** . . . aga kuidas saaksime **ekvivalentsi asendusseose** tuletada *ekvivalentsi* tõeväärtustabelist ?

TTÜ Arvutisüsteemide Instituut

meenutuseks *ekvivalentsi* tõeväärtustabel :

| | inversioon | konjunktsioon | disjunktsioon | implikatsioon | **ekvivalents** |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_1\ x_2$ | | | | | $x_1 \leftrightarrow x_2$ |
| 0 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | **1** |
| 0 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | **0** |
| 1 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | **0** |
| 1 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | **1** |

meenutame eelnevalt vaadeldud 2-muutujaga **tõeväärtustabeleid** ja neile koostatud **avaldisi** , kus $f_t$ oligi juhtumisi **ekvivalents** :

$f_t$ jaoks eelmisel tunnil koostatud DNK ongi *ekvivalentsi asendusseos* :

| $x_1\ x_2$ | $f_e$ | $f_t$ | $f_k$ | $f_n$ | $f_v$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 0 | 0 | **1** | 1 | 1 | 1 |
| 0 1 | 0 | **0** | 0 | 0 | 1 |
| 1 0 | 1 | **0** | 1 | 1 | 1 |
| 1 1 | 0 | **1** | 1 | 0 | 1 |
| | *vastus:* $\overline{x_1 \to x_2}$ <br> $x_1\,\overline{x_2}$ | *vastus:* $x_1 \leftrightarrow x_2$ <br> $\overline{x_1}\,\overline{x_2} \vee x_1 x_2$ <br> $\overline{\overline{x_1}\,x_2 \vee x_1\,\overline{x_2}}$ | *vastus:* $x_2 \to x_1$ <br> $\overline{\overline{x_1}\,x_2}$ | *vastus:* $\overline{x_2}$ <br> $\overline{x_1}\,\overline{x_2} \vee x_1\,\overline{x_2}$ | *vastus:* 1 |

loogikatehte **"summa mooduliga 2"** asendusseos : ( *käsitleme edaspidi* )

$$x \oplus y = \overline{x}\,y \vee x\,\overline{y}$$

## Loogikaavaldiste teisendamine

Loogikaavaldiste *teisendamine* on nende viimine muule samaväärsele (lihtsamale) kujule.

Loogikaavaldisi teisendatakse *loogikaalgebra põhiseoseid* ja *loogikatehete asendusseoseid* rakendades.

**loogikaavaldiste teisendamisel kasutatavate <u>kõikide</u> reeglite**
**KOKKUVÕTE**

$$\overline{\overline{x}} = x$$

$$x \cdot 0 = 0 \qquad x \cdot 1 = x \qquad x \cdot \overline{x} = 0$$

$$x \vee 0 = x \qquad x \vee 1 = 1 \qquad x \vee \overline{x} = 1$$

$$x \cdot x = x \qquad x \vee x = x$$

$$\overline{x \vee y} = \overline{x}\,\overline{y} \qquad \overline{x\,y} = \overline{x} \vee \overline{y}$$

$$x \vee x\,y = x \qquad x \vee \overline{x}\,y = x \vee y$$

$$x(y \vee z) = x\,y \vee x\,z \qquad x \vee (y\,z) = (x \vee y)(x \vee z)$$

$$x = x\,y \vee x\,\overline{y} \qquad x = (x \vee y)(x \vee \overline{y})$$

$$x \to y = \overline{x} \vee y \qquad x \leftrightarrow y = \overline{x}\,\overline{y} \vee x\,y$$

$$x \oplus y = \overline{x}\,y \vee x\,\overline{y}$$

*ülesanne:*

Lihtsusta loogikaavaldised
(*loogikaalgebra põhiseoste* ja *asendusseoste* abil)

$$\overline{x}_1 x_2 \vee \overline{x}_1 x_3 \vee x_2 = \ldots$$

? . . . saaks teisendada : $\ldots = \overline{x}_1(x_2 \vee x_3) \vee x_2$

TTÜ Arvutisteemide Instituut

kuid see pole parim võimalus siin avaldises kuna leidub ka **neeldumine** :

$$\bar{x}_1 x_2 \vee \bar{x}_1 x_3 \vee x_2 = \bar{x}_1 x_3 \vee x_2$$

$$(x_2 \to \bar{x}_1) x_2 \vee \bar{x}_2 = \ldots$$

$$\begin{aligned} \ldots &= (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1) x_2 \vee \bar{x}_2 = \\ &= \bar{x}_2 x_2 \vee \bar{x}_1 x_2 \vee \bar{x}_2 = \\ &= \bar{x}_1 x_2 \vee \bar{x}_2 = \\ &= \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \end{aligned}$$

? . . . seda avaldist oleks saanud *neeldumise* abil lihtsustada ka teisiti, veidi lühemalt :

$$\begin{aligned} \ldots &= (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1) x_2 \vee \bar{x}_2 = \\ &= (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1) \vee \bar{x}_2 = \\ &= \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 = \\ &= \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 \end{aligned}$$

$$x_1 (x_1 \leftrightarrow \bar{x}_2) \vee \bar{x}_2 = \ldots$$

$$\begin{aligned} \ldots &= x_1 (\bar{x}_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_2) \vee \bar{x}_2 = \\ &= x_1 \bar{x}_1 x_2 \vee x_1 x_1 \bar{x}_2 \vee \bar{x}_2 = \\ &= x_1 \bar{x}_2 \vee \bar{x}_2 = \\ &= \bar{x}_2 \end{aligned}$$

$$\bar{x}_1 x_2 \vee x_1 x_2 \vee \bar{x}_2 = \ldots$$

$$\begin{aligned} \ldots &= x_2 (\bar{x}_1 \vee x_1) \vee \bar{x}_2 = \\ &= x_2 \vee \bar{x}_2 = \\ &= 1 \end{aligned}$$

? . . . aga **neeldumisi** oleks kah saanud rakendada (sulgude ette toomise asemel) seljuhul oleks algne avaldis teisendunud :

TTÜ Arvutisüsteemide Instituut

$\bar{x}_1 x_2 \vee x_1 x_2 \vee \bar{x}_2 =$

$= \bar{x}_1 x_2 \vee x_1 \vee \bar{x}_2 =$

$= x_2 \vee x_1 \vee \bar{x}_2 = \ldots.$

$\ldots. = 1 \vee x_1 = \ldots.$

$\ldots. = 1$

. . . kui DNK 2 liiget moodustavad *neeldumise*, siis sellist liikmete paari nimetame *neeldumispaariks*.

? . . . no ja veel võimalus: selline **neeldumine** on siin kah saadaval :

$\ldots. = \bar{x}_1 x_2 \vee x_1 \vee \bar{x}_2 =$

$= \bar{x}_1 \vee x_1 \vee \bar{x}_2 = \ldots.$

$\ldots. = 1 \vee \bar{x}_2 = \ldots.$

$\ldots. = 1$

$(x_1 \vee \bar{x}_2)(\bar{x}_1 \vee x_2) \vee x_1 \bar{x}_2 = \ldots$

$\ldots = x_1 \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_1 \vee x_1 x_2 \vee \bar{x}_2 x_2 \vee x_1 \bar{x}_2 =$

$= \bar{x}_2 \bar{x}_1 \vee x_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_2 = \ldots$

! *tüüpiline viga:*

Kuigi $\bar{x} \vee x = 1$ **ei järeldu** sellest, et $\bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee x_1 x_2$ võrduks samuti konstandiga **1**

Seosest $\bar{x} \vee x = 1$ tuleneb: $\overline{x_1 x_2} \vee x_1 x_2 = 1$

kuid $\bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee x_1 x_2 \neq 1$

võime kontrollida : $\bar{x}_1 \bar{x}_2 \neq \overline{x_1 x_2}$

| $x_1 x_2$ | $\bar{x}_1 \bar{x}_2$ | $\overline{x_1 x_2}$ |
|---|---|---|
| 0 0 | **1** | **1** |
| **0 1** | **0** | **1** |
| 1 0 | . . . pole enam oluline arvutada . . . | . . . pole enam oluline arvutada . . . |
| 1 1 | . . . pole enam oluline arvutada . . . | . . . pole enam oluline arvutada . . . |

( meenutame, et $\bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee x_1 x_2 = x_1 \leftrightarrow x_2$ )

*pane tähele :* samal põhjusel $\bar{x}_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_2 \neq 1$

meenutame, et varasemas ülesandes tekkis vahetulemusena avaldis :

$\ldots = x_1(\bar{x}_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_2) \vee \bar{x}_2 = \ldots$

. . . kus me kah ei asendanud sulgudes olevat avaldist $\bar{x}_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_2$ konstant **1**-ga

*. . . nüüd tagasi poolelioleva teisenduse juurde :*

$\ldots = \bar{x}_2 \bar{x}_1 \vee x_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_2 =$

$= \bar{x}_2 \bar{x}_1 \vee x_1(x_2 \vee \bar{x}_2) =$

TTÜ Arvutisüsteemide Instituut

$$= \bar{x}_2\bar{x}_1 \vee x_1 =$$

$$= \bar{x}_2 \vee x_1$$

*sellel lihtsustamisel saime :*

$$(x_1 \vee \bar{x}_2)(\bar{x}_1 \vee x_2) \vee x_1\bar{x}_2 = \ldots = \bar{x}_2 \vee x_1$$

*. . . l a h e n d a t u d . . .*

**?**. . . või teine tee : sulgude ette oleks saanud tuua ka ühise teguri $\bar{x}_2$

$$\ldots = \bar{x}_2\bar{x}_1 \vee x_1x_2 \vee x_1\bar{x}_2 =$$

$$= \bar{x}_2(\bar{x}_1 \vee x_1) \vee x_1x_2 =$$

$$= \bar{x}_2 \vee x_1x_2 =$$

$$= \bar{x}_2 \vee x_1$$

*. . . l a h e n d a t u d : sama tulemus*

## Pikkade inversioonide olemus avaldistes

**pikk inversioon** avaldise mingi osa kohal tähendab **sulgude olemasolu** selle avaldiseosa ümber:

$$\overline{x_1x_2}x_3 \equiv (\overline{x_1x_2})x_3$$

( . . . . rõhutame, et vastupidine väide ei kehti ehk **sulgude olemasolust** ei järeldu mitte midagi *inversiooni* kohta . . . . )

Lisaks järeldub eelnevast, et avaldise $\overline{x_1\ x_2\ x_3}$ teisendamisel *DeMorgani seadusega :*

$$\overline{x\ y} = \bar{x} \vee \bar{y}$$

. . . . tuleb pika inversiooni ärakadumisel avaldisest kohe panna **sulud**, et avaldises säiliks tehete õige järjekord :

$$\overline{x_1x_2}x_3 = (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2)\,x_3$$

*valesti teisendatud :* $\overline{x_1x_2}x_3 \neq \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2\,x_3$

*ülesanne:*

Lihtsusta loogikaavaldis

( *loogikaalgebra põhiseoste* abil )

$$x_2\ \overline{x_1 \vee x_3} \vee x_1x_2 = \ldots$$

. . . loetavuse parandamiseks võime sedasama avaldist esitada ka kujul :

$$x_2\,\overline{(x_1 \vee x_3)} \vee x_1x_2 = \ldots$$

$$\ldots = x_2(\bar{x}_1\bar{x}_3) \vee x_1x_2 =$$

$$= x_2\bar{x}_1\bar{x}_3 \vee x_1x_2 = x_2(\bar{x}_1\bar{x}_3 \vee x_1) =$$

$$= x_2(\bar{x}_3 \vee x_1) = x_2\bar{x}_3 \vee x_2x_1$$

**!** *tüüpiline viga:*

$$\overline{x_1x_2 \vee x_3x_4} \neq \bar{x}_1\bar{x}_2 \wedge \bar{x}_3\bar{x}_4$$

**DeMorgani seadusest :**

$$\overline{x \vee y} = \bar{x}\,\bar{y}$$ tuleneb :

TTÜ Arvutisüsteemide Instituut

$$\overline{x_1 x_2 \vee x_3 x_4} = \overline{x_1 x_2} \wedge \overline{x_3 x_4} = \overline{x_1 x_2}\ \overline{x_3 x_4}$$

*iseseisev vabatahtlik kodune lahendamine :*

Lihtsusta loogikaavaldised

*loogikaalgebra põhiseoste* ja *loogikatehete asendusseoste* abil

$$(x_1 \leftrightarrow x_2) \rightarrow x_1 = \ldots$$

*vastus:*

$$\ldots = x_1 \vee x_2$$

$$\bar{x}_2 (x_1 \vee \bar{x}_2)(x_2 \vee x_3) \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 = \ldots$$

*vastus:*

$$\ldots = \bar{x}_2 x_3$$

*iseseisev vabatahtlik kodune lahendamine :*

rohelise õpiku **lk. 173** kõik muud ülesanded . . .

*( millest osa juba lahendasime ära siin )*

*ülesanne:*

Lihtsusta loogikaavaldised

(*loogikaalgebra põhiseoste* ja *loogikatehete asendusseoste* abil)

$$[x_1 \vee x_1 x_2 \vee (\bar{x}_1 \rightarrow x_3) x_1 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 x_4] \bar{x}_1 = \ldots$$

$$\ldots = [x_1 \vee (x_1 \vee x_3) x_1 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 x_4] \bar{x}_1 =$$

$$= [x_1 \vee x_1 x_1 \vee x_3 x_1 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 x_4] \bar{x}_1 =$$

$$= [x_1 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 x_4] \bar{x}_1 =$$

$$= x_1 \bar{x}_1 =$$

$$= \mathbf{0}$$

*. . . . lahendatud :* *osutus konstandiks* **0**

**?**. . . . või siis oleks võinud ka nurksulud **lahti korrutada** $\bar{x}_1$ -ga (misjuhul **neeldumisi** poleks toimunudki ) :

$$\ldots = [x_1 \vee x_1 x_1 \vee x_3 x_1 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 x_4] \bar{x}_1 =$$

$$= x_1 \bar{x}_1 \vee x_1 x_1 \bar{x}_1 \vee x_3 x_1 \bar{x}_1 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 x_4 \bar{x}_1 =$$

$$= 0 \vee 0 \vee 0 \vee 0 = \mathbf{0}$$

$$(\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee x_3 x_4 \vee \bar{x}_1 x_3)(\bar{x}_1 \rightarrow x_4)(x_1 \rightarrow \bar{x}_4) = \ldots$$

$$\ldots = (\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee x_3 x_4 \vee \bar{x}_1 x_3)(x_1 \vee x_4)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_4) =$$

TÜ Arvutiteaduse Instituut

**!** *tüüpiline viga:*

sulgude lahtikorrutamise tulemus **peab olema samuti sulgudes** juhul kui need lahtikorrutatud sulud olid korrutatud veel millegagi.

(senistes näidetes / avaldistes oli lahtikorrutatud tulemusele liidetud *disjunktsiooniga* muid liikmeid — misjuhul sulud polnud vajalikud)

**valesti** lahtikorrutatud rohelised sulgliikmed :

$$(\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee x_3 x_4 \vee \bar{x}_1 x_3)(x_1 \vee x_4)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_4) =$$

$$= (\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee x_3 x_4 \vee \bar{x}_1 x_3)\, x_1 \bar{x}_1 \vee x_4 \bar{x}_1 \vee x_1 \bar{x}_4 \vee x_4 \bar{x}_4$$

**õigesti** lahtikorrutatud rohelised sulgliikmed :

$$(\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee x_3 x_4 \vee \bar{x}_1 x_3)(x_1 \vee x_4)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_4) =$$

$$= (\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee x_3 x_4 \vee \bar{x}_1 x_3)(x_1 \bar{x}_1 \vee x_4 \bar{x}_1 \vee x_1 \bar{x}_4 \vee x_4 \bar{x}_4)$$

**!** *tüüpiline viga:*

selle avaldise esimesed liikmed :

$$\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee x_3 x_4 \vee \ldots .$$

. . . . **ei moodusta** omavahel neeldumist $x \vee \bar{x} y$

*. . . tagasi poolelioleva teisenduse juurde :*

$$\ldots = (\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee x_3 x_4 \vee \bar{x}_1 x_3)(x_1 \vee x_4)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_4) =$$

$$= (\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee x_3 x_4 \vee \bar{x}_1 x_3)(x_1 \bar{x}_1 \vee x_4 \bar{x}_1 \vee x_1 \bar{x}_4 \vee x_4 \bar{x}_4) =$$

$$= (\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee x_3 x_4 \vee \bar{x}_1 x_3)(x_4 \bar{x}_1 \vee x_1 \bar{x}_4) = \ldots .$$

. . . . järjekordne sulgude lahtikorrutamine — nende sulgude lahtikorrutamise esmane, optimeerimata tulemus oleks :

$$\ldots . = \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 x_4 \bar{x}_1 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 x_1 \bar{x}_4 \vee x_3 x_4 x_4 \bar{x}_1 \vee$$
$$\vee\ x_3 x_4 x_1 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 x_3 x_4 \bar{x}_1 \vee \bar{x}_1 x_3 x_1 \bar{x}_4 = \ldots .$$

. . . . korduvad *algtermid* jätame tulevikus *elementaarkonjunktsioonide* koosseisust otsekohe ära.

Järgnev avaldis kordab eelmist, rõhutades punase värviga neid liikmed mis põhjustavad selle konkreetse *elementaarkonjunktsiooni* korrutumist **0-ks** :

$$= \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 x_4 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 x_1 \vee x_3 x_4 \bar{x}_1 \vee x_3 x_4 x_1 \bar{x}_4 \vee$$
$$\vee\ \bar{x}_1 x_3 x_4 \vee \bar{x}_1 x_3 x_1 \bar{x}_4 =$$

$$= x_3 x_4 \bar{x}_1 \vee \bar{x}_1 x_3 x_4 =$$

$$= \bar{x}_1 x_3 x_4$$

*seega saime lihtsustamisel :*

$$(\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee x_3 x_4 \vee \bar{x}_1 x_3)(\bar{x}_1 \to x_4)(x_1 \to \bar{x}_4) = \bar{x}_1 x_3 x_4$$

$$[x_1 \bar{x}_4 \vee \overline{\bar{x}_3 (x_2 \vee \bar{x}_1)}]\,(x_1 \bar{x}_2 \vee x_4) = \ldots$$

TTÜ Arvutisüsteemide Instituut

$$\ldots = [x_1\bar{x}_4 \vee \bar{x}_3 \vee \overline{(x_2 \vee \bar{x}_1)}]\,(x_1\bar{x}_2 \vee x_4) =$$

$$= [x_1\bar{x}_4 \vee x_3 \vee x_2 \vee \bar{x}_1]\,(x_1\bar{x}_2 \vee x_4) =$$

$$= x_1\bar{x}_2\bar{x}_4 \vee x_1\bar{x}_4x_4 \vee x_1\bar{x}_2x_3 \vee x_3x_4 \vee x_1\bar{x}_2x_2 \vee x_2x_4 \vee$$

$$\vee\ \bar{x}_1x_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1x_4 =$$

$$= x_1\bar{x}_2\bar{x}_4 \vee x_1\bar{x}_2x_3 \vee x_3x_4 \vee x_2x_4 \vee \bar{x}_1x_4$$

*tekkinud DNK-avaldis on piisavalt keeruline, misjuhul tuleb proovida teda edasi lihtsustada kõigi võtetega, millega üldse saab DNK-d lihtsustada.*

**!** *tüüpiline viga:*

selle avaldise **esimene** ja **neljas** liige :

$$x_1\bar{x}_2\bar{x}_4 \vee \ldots \vee x_2x_4 \vee \ldots$$

. . . . **ei moodusta** neeldumist $x \vee \bar{x}y$

$$\ldots = x_1\bar{x}_2\bar{x}_4 \vee x_1\bar{x}_2x_3 \vee x_3x_4 \vee x_2x_4 \vee \bar{x}_1x_4$$

*on olemas* **4 võtet**, *millega saab DNK-d edasi lihtsustada :*

otsime **neeldumist**: $x \vee xy$

otsime **neeldumist**: $x \vee \bar{x}y$

otsime **ühise teguri sulgude ette toomise** võimalust : $z(x \vee \bar{x})$

otsime **ühise teguri sulgude ette toomise** võimalust : $z(x \vee \bar{x}y)$

**?** . . . . aga miks me ei taha tuua ühist tegurit $z$ sulgude ette nii, et sulgudesse jääks avaldis $z(x \vee xy)$ ?

. . . . kuna optimaalsel teisendamisel **ei tekki** sellist avaldist sulgudesse mitte kunagi, sest *neeldumine* toimuks seljuhul ära juba <u>enne</u> ühise teguri sulgude ette toomist — ehk *neeldumine* esineks seljuhul juba avaldises $zx \vee zxy$

*. . . teisendamisel tekkinud DNK-avaldises*

$$= x_1\bar{x}_2\bar{x}_4 \vee x_1\bar{x}_2x_3 \vee x_3x_4 \vee x_2x_4 \vee \bar{x}_1x_4$$

*. . . . ei õnnestu rakendada nendest neljast lihtsustusvõttest mitte ühtegi. Saadud DNK-avaldis ongi seega lõplikuks teisendustulemuseks.*

( *edaspidi tuleme selle näite juurde tagasi ja tuvastame Karnaugh' kaardi abil, et eelnevalt saadud DNK ei ole* **MDNK** )

*iseseisev vabatahtlik kodune lahendamine :*

Lihtsusta loogikaavaldis ( 3-muutuja loogikafunktsioon )
*loogikaalgebra põhiseoste* ja *asendusseoste* abil

$$(x_1 \leftrightarrow x_3) \vee x_1(x_1 \rightarrow x_2)\,\overline{(x_1 \rightarrow x_3)}\,(x_3 \vee \bar{x}_2) = \ldots$$

*vastus:*

$$\ldots = \bar{x}_1\bar{x}_3 \vee x_1x_3 \vee x_1x_2$$

TTÜ Arvutisüsteemide Instituut

*ülesanne:*

Arvuta / Leia tõeväärtustabel eelnevalt saadud DNK-avaldisele :

$$x_1\bar{x}_2\bar{x}_4 \;\vee\; x_1\bar{x}_2x_3 \;\vee\; x_3x_4 \;\vee\; x_2x_4 \;\vee\; \bar{x}_1x_4$$

ja samuti sellele avaldisele :

$$x_1\bar{x}_2\bar{x}_4 \;\vee\; x_3x_4 \;\vee\; x_2x_4 \;\vee\; \bar{x}_1x_4$$

| $x_1x_2x_3x_4$ | **pikem** DNK-avaldis | **lühem** DNK-avaldis |
|---|---|---|
| 0 0 0 0 | | |
| 0 0 0 1 | | |
| 0 0 1 0 | | |
| 0 0 1 1 | | |
| 0 1 0 0 | | |
| 0 1 0 1 | | |
| 0 1 1 0 | | |
| 0 1 1 1 | | |
| 1 0 0 0 | | |
| 1 0 0 1 | | |
| 1 0 1 0 | | |
| 1 0 1 1 | | |
| 1 1 0 0 | | |
| 1 1 0 1 | | |
| 1 1 1 0 | | |
| 1 1 1 1 | | |

pikem DNK : $x_1\bar{x}_2\bar{x}_4 \;\vee\; x_1\bar{x}_2x_3 \;\vee\; x_3x_4 \;\vee\; x_2x_4 \;\vee\; \bar{x}_1x_4$

lühem DNK : $x_1\bar{x}_2\bar{x}_4 \;\vee\; x_3x_4 \;\vee\; x_2x_4 \;\vee\; \bar{x}_1x_4$

Kas need tõeväärtustabelid tulevad **samasugused** ?

Mida saame järeldada nende avaldiste kohta ja liikme $x_1\bar{x}_2x_3$ kohta ?

*ülesanne:*

Avaldada DNK-kujul avaldis

$$f(x_1x_2x_3) = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$$

on 2 võimalikku DNK-leidmisviisi :

**1.** *kasutades asendusseost* $x \oplus y = \bar{x}y \vee x\bar{y}$

$$x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 = (x_1 \oplus x_2) \oplus x_3 = (\bar{x}_1x_2 \vee x_1\bar{x}_2) \oplus x_3 =$$

$$= \overline{(\bar{x}_1x_2 \vee x_1\bar{x}_2)}\,x_3 \vee (\bar{x}_1x_2 \vee x_1\bar{x}_2)\,\bar{x}_3 =$$

$$= \overline{\bar{x}_1x_2}\;\overline{x_1\bar{x}_2}\;x_3 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 =$$

$$= (x_1 \vee \bar{x}_2)(\bar{x}_1 \vee x_2)\,x_3 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 =$$

$$= (x_1\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2\bar{x}_1 \vee x_1x_2 \vee \bar{x}_2x_2)\,x_3 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 =$$

$$= (\bar{x}_2\bar{x}_1 \vee x_1x_2)\,x_3 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 =$$

$$= \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1x_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3$$

TTÜ Automüstemide Instituut

saime **täieliku DNK** ( TDNK ) kuna igas DNK liikmes leiduvad siin selle funktsiooni $f(x_1 x_2 x_3)$ **kõik** muutujad

*püüame seda DNK-d edasi lihtsustada :*

*meenutame* **4 võtet** , *millega üldse saab DNK-d edasi lihtsustada :*

**neeldumine**: $x \vee x y$ *pole võimalik TDNK korral*

**neeldumine**: $x \vee \bar{x} y$ *pole võimalik TDNK korral*

**ühine tegur sulgude ette** : $z(x \vee \bar{x} y)$ *pole võimalik TDNK korral*

**?** . . . . *MIKS pole <u>need 3 teisendusvõtet</u> kasutatavad TDNK peal* **?**

nendest neljast ainsana osutub võimalikuks TDNK jaoks :

**ühine tegur sulgude ette** : $z(x \vee \bar{x})$ ainult see on võimalik TDNK korral

$$\ldots = \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$$

*. . . otsime siin TDNK-avaldises sellist võimalust tuua ühine tegur sulgude ette . . . .*
*selgub et siin ei leidu ainsatki sellist võimalust — seega ei saa seda TDNK-avaldist enam lihtsustada ehk teisendustulemuseks jääbki TDNK :*

$$\ldots = \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$$

( *l a h e n d a t u d* )

**2.** sama ülesande **teine lahendusvõimalus** DNK saamiseks avaldisele $x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$ :

*avaldise* $x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$ *teisendamise asemel koostame / arvutame talle* **tõeväärtustabeli** :

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | |
| 0 | 0 | 1 | |
| 0 | 1 | 0 | |
| 0 | 1 | 1 | |
| 1 | 0 | 0 | |
| 1 | 0 | 1 | |
| 1 | 1 | 0 | |
| 1 | 1 | 1 | |

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| **0** | **0** | **1** | **1** |
| **0** | **1** | **0** | **1** |
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| **1** | **0** | **0** | **1** |
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 |
| **1** | **1** | **1** | **1** |

**!** DNK saadakse loogikafunktsiooni **1de piirkonnast !**

. . . . ja tõeväärtustabelist saab vahetult väljakirjutada just **TDNK**

*kirjutame tõeväärtustabeli* **1***de piirkonnast välja TDNK elementaarkonjunktsioonid — need tulevad samad nagu saime ka teisendamisel :*

TTÜ Arvutisüsteemide Instituut

| $x_1\ x_2\ x_3$ | $x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$ | TDNK liikmed |
|---|---|---|
| 0 0 0 | 0 | |
| **0 0 1** | **1** | $\bar{x}_1\bar{x}_2x_3$ |
| **0 1 0** | **1** | $\bar{x}_1x_2\bar{x}_3$ |
| 0 1 1 | 0 | |
| **1 0 0** | **1** | $x_1\bar{x}_2\bar{x}_3$ |
| 1 0 1 | 0 | |
| 1 1 0 | 0 | |
| **1 1 1** | **1** | $x_1x_2x_3$ |

$$x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 = \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1x_2x_3$$

. . . . eelnevalt saime XOR-avaldise lihtsustamisel :

$$x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots =$$

$$= \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1x_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3$$

. . . . proovides l i h t s u s t a d a *tõeväärtustabelist* väljakirjutatud TDNK-d ? — osutub võimatuks.

( *l a h e n d a t u d* )

. . . . enne olid näitena 2 avaldist, kus tohib asendada tehte $\vee$ tehtega $\oplus$ (ilma seejuures avaldist loogiliselt muutmata / rikkumata) :

$$\bar{x}_1x_2 \vee x_1\bar{x}_2 = \bar{x}_1x_2 \oplus x_1\bar{x}_2$$

$$\bar{x}_1x_2x_3 \vee x_1\bar{x}_2x_3 = \bar{x}_1x_2x_3 \oplus x_1\bar{x}_2x_3$$

Need mõlemad DNK-avaldised on **täielik**ud DNK-d ( TDNK ).
Nüüd saadud DNK on samuti TDNK. Kas ka selles just saadud 4-liikmelises TDNK-avaldises tohib asendada $\vee$ tehtega $\oplus$ nii et avaldise tõeväärtustabel püsib muutumatuna ?

*ülesanne:*

Kontrolli (tõeväärtustabelit leides ja analüüsides) k a s eelnevalt saadud TDNK

$$\bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1x_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3$$

muutub või ei muutu *loogiliselt*, kui seal asendada tehe $\vee$ tehteks $\oplus$ ?

. . . . olles asendanud TDNK-s **VÕI**-tehte **VÄLISTAVAKS VÕI** -tehteks ( $\vee$ tehteks $\oplus$ ) e i o l e selliselt muudetud avaldis enam TDNK ega üldse DNK.

Siin keskendub küsimus sellele, kas t õ e v ä ä r t u s t a b e l muutub või ei muutu, kui avaldises selline tehteasendus teha . . .

Leiame, kuidas väärtustub selle TDNK iga üksik *elementaarkonjunktsioon* $x_1x_2x_3$ kui asendame siia avaldisse *argumentvektoreid* .

$$\bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1x_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3$$

$$\begin{aligned}
f(000) &= 0 \vee 0 \vee 0 \vee 0 = \mathbf{0}\\
f(001) &= \mathbf{1} \vee 0 \vee 0 \vee 0 = \mathbf{1}\\
f(010) &= 0 \vee 0 \vee \mathbf{1} \vee 0 = \mathbf{1}\\
f(011) &= 0 \vee 0 \vee 0 \vee 0 = \mathbf{0}\\
f(100) &= 0 \vee 0 \vee 0 \vee \mathbf{1} = \mathbf{1}\\
f(101) &= 0 \vee 0 \vee 0 \vee 0 = \mathbf{0}\\
f(110) &= 0 \vee 0 \vee 0 \vee 0 = \mathbf{0}\\
f(111) &= 0 \vee \mathbf{1} \vee 0 \vee 0 = \mathbf{1}
\end{aligned}$$

TTÜ Arvutisüsteemide Instituut

Ilmneb, et mitte ükski muutujaväärtuste komplekt ( *argumentvektor* ) ei arvuta väärtust **1** TDNK m i t m e l e *elementaarkonjunktsioonile* — vaid arvutab **1**-ks täpselt ü h e a i n s a *elementaarkonjunktsiooni.*

**Igas** TDNK-s on täidetud tingimus, mille korral tehted $\vee$ ja $\oplus$ arvutavad avaldises "samaväärselt" ja neid tohib teineteisega asendada, ilma avaldist loogiliselt "rikkumata" :

$$\bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1x_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 =$$
$$= \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \oplus x_1x_2x_3 \oplus \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 \oplus x_1\bar{x}_2\bar{x}_3$$

*ülesanne:*

Lihtsusta loogikaavaldis

( *asendusseoste* ja *loogikaalgebra põhiseoste* abil )

$$x_1\,\overline{x_1 \oplus x_2} \oplus x_1x_2 = \ldots$$

$$\ldots = x_1(x_1 \leftrightarrow x_2) \oplus x_1x_2 =$$
$$= x_1(\bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_1x_2) \oplus x_1x_2 =$$
$$= (x_1\bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_1x_1x_2) \oplus x_1x_2 =$$
$$= (0 \vee x_1x_2) \oplus x_1x_2 =$$
$$= x_1x_2 \oplus x_1x_2 =$$
$$= 0$$

*iseseisev vabatahtlik kodune lahendamine:*

rohelise õpiku **lk. 205** viimased 2 ülesannet . . . .

*( . . . . mida me ei lahendanud ära tunnis )*

. . . . kas **kirjaliku kodutöö** ülesandeid võib juba hakata lahendama?

tõepoolest — *kirjalik kodutöö* koosneb paljudest teemadest / alamülesannetest ja ta tehakse / lahendatakse esmalt p a b e r i p e a l s e m u s t a n d i n a .

Kuigi oktoobris pole veel kiiret kodutööga — siis nii *loengud* kui ka *harjutustunnid* on jõudmas järjega kodutöö jaoks vajalike teemadeni — misjuhul võid soovikorral alustada kodutöö n e n d e ülesannete paberil äralahendamist, mille teemad on loengus või harjutustunnis juba läbitud.

Alustuseks on vaja leida omaenda isiklik **4-muutuja loogikafunktsioon**, mis genereeritakse oma t u d e n g i k o o d i lõpunumbritest : _ _ _ _ _

*ülesanne:*

Kirjuta tõeväärtustabelist välja selle funktsiooni TDNK ja

TTÜ Arvutisüsteemide Instituut

lihtsusta see *loogikaalgebra põhiseoste* abil MDNK-ks

| $x_1\,x_2\,x_3$ | $f(x_1\,x_2\,x_3)$ |
|---|---|
| 0 0 0 | **1** |
| 0 0 1 | **0** |
| 0 1 0 | **1** |
| 0 1 1 | **1** |
| 1 0 0 | **0** |
| 1 0 1 | **1** |
| 1 1 0 | **1** |
| 1 1 1 | **1** |

$$f(x_1\,x_2\,x_3) = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1\bar{x}_2 x_3 \vee$$
$$\vee\; x_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 x_2 x_3 = \ldots$$

*jälle meenutame* **4 võtet** *, millega saab DNK-d edasi lihtsustada :*

**neeldumine**: $x \vee x\,y$ *pole võimalik TDNK korral*

**neeldumine**: $x \vee \bar{x}\,y$ *pole võimalik TDNK korral*

**ühine tegur sulgude ette** : $z\,(x \vee \bar{x}\,y)$ *pole võimalik TDNK korral*

**ühine tegur sulgude ette** : $z\,(x \vee \bar{x})$ ainult see on võimalik TDNK korral

$$\ldots = \bar{x}_1\bar{x}_3(\bar{x}_2 \vee x_2) \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1\bar{x}_2 x_3 \vee$$
$$\vee\; x_1 x_2(\bar{x}_3 \vee x_3) =$$

$$= \bar{x}_1\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1\bar{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 = \ldots$$

on tekkinud DNK-avaldis, kus nüüd juba leiduvad **erinevate tegurite arvuga** *elementaarkonjunktsioonid* — misjuhul v õ i b nüüd leiduda ka **neeldumisi** :

$x \vee x\,y$

$x \vee \bar{x}\,y$

. . . . ja nüüd saab leiduda võimalusi *ühist tegurit sulgude ette tuua* ka nii:

$z\,(x \vee \bar{x}\,y)$

$$\ldots = \bar{x}_1(\bar{x}_3 \vee x_2 x_3) \vee x_1(\bar{x}_2 x_3 \vee x_2) =$$
$$= \bar{x}_1(\bar{x}_3 \vee x_2) \vee x_1(x_3 \vee x_2) =$$
$$= \bar{x}_1\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \vee x_1 x_3 \vee x_1 x_2 = \ldots$$

. . . siit edasi saab leiduda ainult teisendussamm : $z\,(x \vee \bar{x})$ kuna tekkinud DNK kõik *elementaarkonjunktsioonid* on (võrdselt) **kahe** algtermiga

$$\ldots = \bar{x}_1\bar{x}_3 \vee x_2(\bar{x}_1 \vee x_1) \vee x_1 x_3 =$$
$$= \bar{x}_1\bar{x}_3 \vee x_2 \vee x_1 x_3$$

*teisendustulemuseks saadud DNK on* **MDNK**

*iseseisev vabatahtlik kodune lahendamine :*

Lihtsusta eelnev TDNK veelkord samaks MDNK-ks , alustades esimesel teisendussammul senisest erinevalt :

$$f(x_1\,x_2\,x_3) = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1\bar{x}_2 x_3 \vee$$
$$\vee\; x_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 x_2 x_3 =$$

$$= \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_2\bar{x}_3(\bar{x}_1 \vee x_1) \vee x_2 x_3(\bar{x}_1 \vee x_1) \vee x_1\bar{x}_2 x_3 =$$

$= \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad =$

$= \quad \bar{x}_1 \bar{x}_3 \;\vee\; x_2 \;\vee\; x_1 x_3$

## Loogikaavaldiste teisenduste kokkuvõtteks

Kõik teisendusnäited viitavad, et avaldiste käsitsi lihtsustamise tulemuseks on enamasti **Disjunktiivne Normaalkuju** ( **DNK** )

Meenutame varasemat ülesannet, kus koostati **viie** *tõeväärtustabeli* jaoks neid esitavad **loogikaavaldisi** :

| $x_1 x_2$ | $f_e$ | $f_t$ | $f_k$ | $f_n$ | $f_v$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 0 | **0** | **1** | **1** | **1** | **1** |
| 0 1 | **0** | **0** | **0** | **0** | **1** |
| 1 0 | **1** | **0** | **1** | **1** | **1** |
| 1 1 | **0** | **1** | **1** | **0** | **1** |
| | *avaldised:* | *avaldised:* | *avaldised:* | *avaldised:* | *avaldis:* |
| | $\overline{x_1 \to x_2}$ | $x_1 \leftrightarrow x_2$ | $x_2 \to x_1$ | $\bar{x}_2$ | **1** |
| | | $\bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee x_1 x_2$ | $\bar{x}_1 \to \bar{x}_2$ | | |
| | $\overline{\bar{x}_1 \vee x_2}$ | $(x_1 \vee \bar{x}_2)(\bar{x}_1 \vee x_2)$ | $x_1 \vee \bar{x}_2$ | $\bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee x_1 \bar{x}_2$ | |
| | | | | $(x_1 \vee \bar{x}_2)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2)$ | |
| | $x_1 \bar{x}_2$ | $\overline{\bar{x}_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_2}$ | $\overline{\bar{x}_1 x_2}$ | | |

Siin on igale 2-muutuja funktsioonile (igale *tõeväärtustabelile*) esitatud kuni **4** sobivat loogikaavaldist.

*iseseisev vabatahtlik kodune lahendamine :*

Leia teisendussammud, kuidas eelnevas tabelis näidatud . . . .

iga **punane** avaldis teisendub (samas veerus olevaks) **siniseks** avaldiseks ;

iga **sinine** avaldis teisendub (samas veerus olevaks) **roheliseks** avaldiseks.

*ülesanne:*

Kirjuta varasema ülesande tõeväärtustabelist välja selle funktsiooni **Täielik Konjunktiivne Normaalkuju** (TKNK)
( enne leidsime sellesama funktsiooni **TDNK** )

| $x_1 x_2 x_3$ | $f(x_1 x_2 x_3)$ |
|---|---|
| 0 0 0 | **1** |
| 0 0 1 | **0** |
| 0 1 0 | **1** |
| 0 1 1 | **1** |
| 1 0 0 | **0** |
| 1 0 1 | **1** |
| 1 1 0 | **1** |
| 1 1 1 | **1** |

KNK on *duaalselt vastupidine* normaalkuju DNK suhtes ja ta leitakse kah d u a a l s e l t v a s t u p i d i s t e reeglitega.
KNK on *elementaardisjunktsioonide konjunktsioon.*
Selle funktsiooni TKNK saame *tõeväärtustabelist* väljakirjutada sellisena :

$$f(x_1 x_2 x_3) = (x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3)$$

KNK vajab / sisaldab alati s u l g e !

TTÜ Arvutisüsteemide instituut