Loogikatehete asendusseosed

Asendusseosed asendavad *mitteelementaarseid* loogikatehteid

implikatsioon: $\rightarrow$

ekvivalents: $\leftrightarrow$

summa mooduliga 2: $\oplus$ (ka *"välistav VÕI"* *XOR*)
(see tehe on käsitletud edaspidi)

...elementaarsete loogikatehete (*inversioon*, *disjunktsioon*, *konjunktsioon*) kaudu:

implikatsiooni asendusseos :

$$x \rightarrow y \;=\; \bar{x} \vee y$$

(*kontrollida tõeväärtustabelite võrdlemise teel* **!**)

ülesanne:

Kontrolli **tõeväärtustabelite võrdlemise teel**, kas

$$x_1 \rightarrow x_2 \;=\; \bar{x}_1 \vee x_2 \quad ?$$

meenutuseks *implikatsiooni* tõeväärtustabel :

	inversioon	konjunktsioon	disjunktsioon	implikatsioon	
$x_1\, x_2$				$x_1 \rightarrow x_2$	$\bar{x}_1 \vee x_2$
0 0	1	0	0	**1**	?
0 1	1	0	1	**1**	?
1 0	0	0	1	**0**	?
1 1	0	1	1	**1**	?

seega :

$$x_1 \rightarrow x_2 \;=\; \bar{x}_1 \vee x_2$$

ekvivalentsi asendusseosed :

meenutame :

ekvivalentsi korral on mõlemad tema operandid samaaegselt teineteise *eelduseks* ja *järelduseks* :

$$x \leftrightarrow y \;=\; (x \rightarrow y)(y \rightarrow x)$$

eelnev võrdus ongi kasutatav **ekvivalentsi** ühe võimaliku asendusseosena;

ülesanne:

Püüa tuletada **ekvivalentsi** jaoks veel üks *asendusseos*, teisendades edasi avaldist : $x \leftrightarrow y \;=\; (x \rightarrow y)(y \rightarrow x) \;=\; \ldots$

. . . . kasutades **implikatsiooni** eelpoolset *asendusseost* :

$x \rightarrow y \;=\; \bar{x} \vee y$ . . . . ja sulgude järgnevat lahtikorrutamist.

asendades mõlemad **implikatsioonid** tema *asendusseosega*

$$x \rightarrow y \;=\; \bar{x} \vee y$$

. . . saame teisendada :

$$x \leftrightarrow y \;=\; (x \rightarrow y)(y \rightarrow x) \;=\; (\bar{x} \vee y)(\bar{y} \vee x) \;=$$

$$=\; \bar{x}\bar{y} \vee y\bar{y} \vee \bar{x}x \vee yx \;=$$

$$=\; \bar{x}\bar{y} \vee 0 \vee 0 \vee yx \;=\; \bar{x}\bar{y} \vee xy$$

. . . seega oleks *ekvivalentsi* eelistatuim asendusseos (kohe DNK-kujule) :

$$x \leftrightarrow y \;=\; \bar{x}\bar{y} \vee xy$$

? . . . aga kuidas saaksime **ekvivalentsi asendusseose** tuletada *ekvivalentsi* tõeväärtustabelist ?

meenutuseks *ekvivalentsi* tõeväärtustabel :

	inversioon	konjunktsioon	disjunktsioon	implikatsioon	ekvivalents
$x_1\ x_2$					$x_1 \leftrightarrow x_2$
0 0	1	0	0	1	1
0 1	1	0	1	1	0
1 0	0	0	1	0	0
1 1	0	1	1	1	1

meenutame eelnevalt vaadeldud 2-muutujaga **tõeväärtustabeleid** ja neile koostatud **avaldisi**, kus f_t oligi juhtumisi **ekvivalents** :

f_t jaoks eelmisel tunnil koostatud DNK ongi *ekvivalentsi asendusseos* :

$x_1 x_2$	f_e	f_t	f_k	f_n	f_v
0 0	0	**1**	1	1	1
0 1	0	**0**	0	0	1
1 0	1	**0**	1	1	1
1 1	0	**1**	1	0	1
	vastus: $\overline{x_1 \rightarrow x_2}$ $x_1\,\bar{x}_2$	*vastus:* $x_1 \leftrightarrow x_2$ $\bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_1 x_2$ $\overline{\bar{x}_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_2}$	*vastus:* $x_2 \rightarrow x_1$ $\overline{\bar{x}_1\,x_2}$	*vastus:* $\bar{x}_2$ $\bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_1\bar{x}_2$	*vastus:* 1

loogikatehte **"summa mooduliga 2"** asendusseos : (*käsitleme edaspidi*)

$$x \oplus y = \bar{x}y \vee x\bar{y}$$

Loogikaavaldiste teisendamine

Loogikaavaldiste *teisendamine* on nende viimine muule samaväärsele (lihtsamale) kujule.

Loogikaavaldisi teisendatakse *loogikaalgebra põhiseoseid* ja *loogikatehete asendusseoseid* rakendades.

loogikaavaldiste teisendamisel kasutatavate <u>kõikide</u> reeglite KOKKUVÕTE

$$\bar{\bar{x}} = x$$

$$x \cdot 0 = 0 \qquad x \cdot 1 = x \qquad x \cdot \bar{x} = 0$$

$$x \vee 0 = x \qquad x \vee 1 = 1 \qquad x \vee \bar{x} = 1$$

$$x \cdot x = x \qquad x \vee x = x$$

$$\overline{x \vee y} = \bar{x}\,\bar{y} \qquad \overline{x\,y} = \bar{x} \vee \bar{y}$$

$$x \vee xy = x \qquad x \vee \bar{x}y = x \vee y$$

$$x(y \vee z) = xy \vee xz \qquad x \vee (yz) = (x \vee y)(x \vee z)$$

$$x = xy \vee x\bar{y} \qquad x = (x \vee y)(x \vee \bar{y})$$

$$x \rightarrow y = \bar{x} \vee y \qquad x \leftrightarrow y = \bar{x}\bar{y} \vee xy$$

$$x \oplus y = \bar{x}y \vee x\bar{y}$$

ülesanne:

Lihtsusta loogikaavaldised
(*loogikaalgebra põhiseoste* ja *asendusseoste* abil)

$$\bar{x}_1 x_2 \vee \bar{x}_1 x_3 \vee x_2 = \ldots$$

? . . . saaks teisendada : $\dots = \bar{x}_1(x_2 \vee x_3) \vee x_2$

kuid see pole parim võimalus siin avaldises kuna leidub ka **neeldumine** :

$$\bar{x}_1 x_2 \vee \bar{x}_1 x_3 \vee x_2 = \bar{x}_1 x_3 \vee x_2$$

$$(x_2 \to \bar{x}_1) x_2 \vee \bar{x}_2 = \dots$$

$$\begin{aligned} \dots &= (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1) x_2 \vee \bar{x}_2 = \\ &= \bar{x}_2 x_2 \vee \bar{x}_1 x_2 \vee \bar{x}_2 = \\ &= \bar{x}_1 x_2 \vee \bar{x}_2 = \\ &= \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \end{aligned}$$

? . . . seda avaldist oleks saanud *neeldumise* abil lihtsustada ka teisiti, veidi lühemalt :

$$\begin{aligned} \dots &= (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1) x_2 \vee \bar{x}_2 = \\ &= (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1) \vee \bar{x}_2 = \\ &= \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 = \\ &= \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 \end{aligned}$$

$$x_1(x_1 \leftrightarrow \bar{x}_2) \vee \bar{x}_2 = \dots$$

$$\begin{aligned} \dots &= x_1(\bar{x}_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_2) \vee \bar{x}_2 = \\ &= x_1 \bar{x}_1 x_2 \vee x_1 x_1 \bar{x}_2 \vee \bar{x}_2 = \\ &= x_1 \bar{x}_2 \vee \bar{x}_2 = \\ &= \bar{x}_2 \end{aligned}$$

$$\bar{x}_1 x_2 \vee x_1 x_2 \vee \bar{x}_2 = \dots$$

$$\begin{aligned} \dots &= x_2(\bar{x}_1 \vee x_1) \vee \bar{x}_2 = \\ &= x_2 \vee \bar{x}_2 = \\ &= 1 \end{aligned}$$

? . . . aga **neeldumisi** oleks kah saanud rakendada
(sulgude ette toomise asemel)
seljuhul oleks algne avaldis teisendunud :

$$\bar{x}_1 x_2 \vee x_1 x_2 \vee \bar{x}_2 =$$

$$= \bar{x}_1 x_2 \vee x_1 \vee \bar{x}_2 =$$

$$= x_2 \vee x_1 \vee \bar{x}_2 = \ldots.$$

$$\ldots. = 1 \vee x_1 = \ldots.$$

$$\ldots. = 1$$

? . . . no ja veel võimalus: selline **neeldumine** on siin kah saadaval :

$$\ldots. = \bar{x}_1 x_2 \vee x_1 \vee \bar{x}_2 =$$

$$= \bar{x}_1 \vee x_1 \vee \bar{x}_2 = \ldots.$$

$$\ldots. = 1 \vee \bar{x}_2 = \ldots.$$

$$\ldots. = 1$$

$$(x_1 \vee \bar{x}_2)(\bar{x}_1 \vee x_2) \vee x_1 \bar{x}_2 = \ldots$$

$$\ldots = x_1 \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_1 \vee x_1 x_2 \vee \bar{x}_2 x_2 \vee x_1 \bar{x}_2 =$$

$$= \bar{x}_2 \bar{x}_1 \vee x_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_2 = \ldots$$

! *tüüpiline viga:*

Kuigi $\bar{x} \vee x = 1$ **ei järeldu** sellest, et $\bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee x_1 x_2$ võrduks samuti konstandiga **1**

Seosest $\bar{x} \vee x = 1$ tuleneb: $\overline{x_1 x_2} \vee x_1 x_2 = 1$

kuid $\bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee x_1 x_2 \neq 1$

võime kontrollida : $\bar{x}_1 \bar{x}_2 \neq \overline{x_1 x_2}$

$x_1 x_2$	$\bar{x}_1 \bar{x}_2$	$\overline{x_1 x_2}$
0 0	**1**	**1**
0 1	**0**	**1**
1 0	. . . pole enam oluline arvutada . . .	. . . pole enam oluline arvutada . . .
1 1	. . . pole enam oluline arvutada . . .	. . . pole enam oluline arvutada . . .

(meenutame, et $\bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee x_1 x_2 = x_1 \leftrightarrow x_2$)

pane tähele : samal põhjusel $\bar{x}_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_2 \neq 1$

meenutame, et varasemas ülesandes tekkis vahetulemusena avaldis :

$$\ldots = x_1(\bar{x}_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_2) \vee \bar{x}_2 = \ldots$$

. . . kus me kah ei asendanud sulgudes olevat avaldist $\bar{x}_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_2$ konstant **1**-ga

. . . nüüd tagasi poolelioleva teisenduse juurde :

$$\ldots = \bar{x}_2\bar{x}_1 \vee x_1x_2 \vee x_1\bar{x}_2 =$$
$$= \bar{x}_2\bar{x}_1 \vee x_1(x_2 \vee \bar{x}_2) =$$
$$= \bar{x}_2\bar{x}_1 \vee x_1 =$$
$$= \bar{x}_2 \vee x_1$$

sellel lihtsustamisel saime :

$$(x_1 \vee \bar{x}_2)(\bar{x}_1 \vee x_2) \vee x_1\bar{x}_2 = \ldots\ldots = \bar{x}_2 \vee x_1$$

. . . l a h e n d a t u d . . .

? . . . või teine tee : sulgude ette oleks saanud tuua ka ühise teguri $\bar{x}_2$

$$\ldots = \bar{x}_2\bar{x}_1 \vee x_1x_2 \vee x_1\bar{x}_2 =$$
$$= \bar{x}_2(\bar{x}_1 \vee x_1) \vee x_1x_2 =$$
$$= \bar{x}_2 \vee x_1x_2 =$$
$$= \bar{x}_2 \vee x_1$$

. . . l a h e n d a t u d : sama tulemus

Pikkade inversioonide olemus avaldistes

pikk inversioon avaldise mingi osa kohal tähendab **sulgude olemasolu** selle avaldiseosa ümber:

$$\overline{x_1x_2}x_3 \equiv (\overline{x_1x_2})x_3$$

(. . . . rõhutame, et vastupidine väide ei kehti ehk **sulgude olemasolust** ei järeldu mitte midagi *inversiooni* kohta . . . .)

Lisaks järeldub eelnevast, et avaldise $\overline{x_1\,x_2}\,x_3$ teisendamisel *DeMorgani seadusega :*

$$\overline{x\,y} = \bar{x} \vee \bar{y}$$

. . . . tuleb pika inversiooni ärakadumisel avaldisest kohe panna **sulud**, et avaldises säiliks tehete õige järjekord :

$$\overline{x_1x_2}x_3 = (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2)\,x_3$$

valesti teisendatud : $\overline{x_1x_2}x_3 \neq \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2\,x_3$

ülesanne:

Lihtsusta loogikaavaldis
(*loogikaalgebra põhiseoste* abil)

$$x_2\,\overline{x_1 \vee x_3} \vee x_1x_2 = \ldots$$

. . . loetavuse parandamiseks võime sedasama avaldist esitada ka kujul :

$$x_2\,(\overline{x_1 \vee x_3}) \vee x_1x_2 = \ldots$$

$$\ldots = x_2(\bar{x}_1\bar{x}_3) \vee x_1x_2 =$$
$$= x_2\bar{x}_1\bar{x}_3 \vee x_1x_2 = x_2(\bar{x}_1\bar{x}_3 \vee x_1) =$$
$$= x_2(\bar{x}_3 \vee x_1) = x_2\bar{x}_3 \vee x_2x_1$$

! *tüüpiline viga:*

$$\overline{x_1 x_2 \vee x_3 x_4} \neq \overline{x_1}\,\overline{x_2} \wedge \overline{x_3}\,\overline{x_4}$$

DeMorgani seadusest :

$$\overline{x \vee y} = \bar{x}\,\bar{y}$$ tuleneb :

$$\overline{x_1 x_2 \vee x_3 x_4} = \overline{x_1 x_2} \wedge \overline{x_3 x_4} = \overline{x_1 x_2}\;\overline{x_3 x_4}$$

iseseisev vabatahtlik kodune lahendamine :

Lihtsusta loogikaavaldised

loogikaalgebra põhiseoste ja *loogikatehete asendusseoste* abil

$$(x_1 \leftrightarrow x_2) \to x_1 = \dots$$

vastus:

$$\dots = x_1 \vee x_2$$

$$\bar{x}_2(x_1 \vee \bar{x}_2)(x_2 \vee x_3) \vee x_1\bar{x}_2x_3 = \dots$$

vastus:

$$\dots = \bar{x}_2 x_3$$

iseseisev vabatahtlik kodune lahendamine :

rohelise õpiku **lk. 173** kõik muud ülesanded . . .

(millest osa juba lahendasime ära siin)

ülesanne:

Lihtsusta loogikaavaldised

(*loogikaalgebra põhiseoste* ja *loogikatehete asendusseoste* abil)

$$[x_1 \vee x_1x_2 \vee (\bar{x}_1 \to x_3)x_1 \vee x_1x_2\bar{x}_3x_4]\bar{x}_1 = \dots$$

$$\dots = [x_1 \vee (x_1 \vee x_3)x_1 \vee x_1x_2\bar{x}_3x_4]\bar{x}_1 =$$

$$= [x_1 \vee x_1x_1 \vee x_3x_1 \vee x_1x_2\bar{x}_3x_4]\bar{x}_1 =$$

$$= [x_1 \vee x_1x_2\bar{x}_3x_4]\bar{x}_1 =$$

$$= x_1\bar{x}_1 =$$

$$= \mathbf{0}$$

. . . . *lahendatud :* *osutus konstandiks* **0**

? . . . . või siis oleks võinud ka nurksulud **lahti korrutada** $\bar{x}_1$ -ga

(misjuhul **neeldumisi** poleks toimunudki) :

$$\dots = [x_1 \vee x_1x_1 \vee x_3x_1 \vee x_1x_2\bar{x}_3x_4]\bar{x}_1 =$$

$$= x_1\bar{x}_1 \vee x_1x_1\bar{x}_1 \vee x_3x_1\bar{x}_1 \vee x_1x_2\bar{x}_3x_4\bar{x}_1 =$$

$$= 0 \vee 0 \vee 0 \vee 0 = \mathbf{0}$$

$$(\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee x_3 x_4 \vee \bar{x}_1 x_3)(\bar{x}_1 \to x_4)(x_1 \to \bar{x}_4) = \dots$$

$$\dots = (\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee x_3 x_4 \vee \bar{x}_1 x_3)(x_1 \vee x_4)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_4) =$$

! *tüüpiline viga:*

sulgude lahtikorrutamise tulemus **peab olema samuti sulgudes** juhul kui need lahtikorrutatud sulud olid k o r r u t a t u d veel millegagi.

(senistes näidetes / avaldistes oli lahtikorrutatud tulemusele l i i d e t u d *disjunktsiooniga* muid liikmeid — misjuhul sulud polnud vajalikud)

v a l e s t i lahtikorrutatud rohelised sulgliikmed :

$$(\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee x_3 x_4 \vee \bar{x}_1 x_3)(x_1 \vee x_4)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_4) =$$

$$= (\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee x_3 x_4 \vee \bar{x}_1 x_3)\ x_1 \bar{x}_1 \vee x_4 \bar{x}_1 \vee x_1 \bar{x}_4 \vee x_4 \bar{x}_4$$

õ i g e s t i lahtikorrutatud rohelised sulgliikmed :

$$(\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee x_3 x_4 \vee \bar{x}_1 x_3)(x_1 \vee x_4)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_4) =$$

$$= (\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee x_3 x_4 \vee \bar{x}_1 x_3)(x_1 \bar{x}_1 \vee x_4 \bar{x}_1 \vee x_1 \bar{x}_4 \vee x_4 \bar{x}_4)$$

! *tüüpiline viga:*

selle avaldise esimesed liikmed :

$$\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee x_3 x_4 \vee \dots .$$

. . . . **ei moodusta** omavahel neeldumist $x \vee \bar{x} y$

. . . tagasi poolelioleva teisenduse juurde :

$$\dots = (\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee x_3 x_4 \vee \bar{x}_1 x_3)(x_1 \vee x_4)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_4) =$$

$$= (\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee x_3 x_4 \vee \bar{x}_1 x_3)(x_1 \bar{x}_1 \vee x_4 \bar{x}_1 \vee x_1 \bar{x}_4 \vee x_4 \bar{x}_4) =$$

$$= (\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee x_3 x_4 \vee \bar{x}_1 x_3)(x_4 \bar{x}_1 \vee x_1 \bar{x}_4) = \dots .$$

. . . . järjekordne sulgude lahtikorrutamine — nende sulgude lahtikorrutamise esmane, optimeerimata tulemus oleks :

$$\dots . = \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 x_4 \bar{x}_1 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 x_1 \bar{x}_4 \vee x_3 x_4 x_4 \bar{x}_1 \vee x_3 x_4 x_1 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 x_3 x_4 \bar{x}_1 \vee \bar{x}_1 x_3 x_1 \bar{x}_4 = \dots .$$

. . . . korduvad *algtermid* jätame tulevikus *elementaarkonjunktsioonide* koosseisust otsekohe ära.
Järgnev avaldis kordab eelmist, rõhutades punase värviga neid liikmed mis põhjustavad selle konkreetse *elementaarkonjunktsiooni* korrutumist **0-ks** :

$$= \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 x_4 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 x_1 \vee x_3 x_4 \bar{x}_1 \vee x_3 x_4 x_1 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 x_3 x_4 \vee \bar{x}_1 x_3 x_1 \bar{x}_4 =$$

$$= x_3 x_4 \bar{x}_1 \vee \bar{x}_1 x_3 x_4 =$$

$$= \bar{x}_1 x_3 x_4$$

seega saime lihtsustamisel :

$$(\bar x_1 x_2 \bar x_3 \bar x_4 \vee x_3 x_4 \vee \bar x_1 x_3)(\bar x_1 \to x_4)(x_1 \to \bar x_4) = \bar x_1 x_3 x_4$$

$$[x_1 \bar x_4 \vee \overline{\bar x_3 \overline{(x_2 \vee \bar x_1)}}](x_1 \bar x_2 \vee x_4) = \ldots$$

$$\ldots = [x_1 \bar x_4 \vee \bar{\bar x}_3 \vee \overline{\overline{(x_2 \vee \bar x_1)}}](x_1 \bar x_2 \vee x_4) =$$

$$= [x_1 \bar x_4 \vee x_3 \vee x_2 \vee \bar x_1](x_1 \bar x_2 \vee x_4) =$$

$$= x_1 \bar x_2 \bar x_4 \vee x_1 \bar x_4 x_4 \vee x_1 \bar x_2 x_3 \vee x_3 x_4 \vee x_1 \bar x_2 x_2 \vee x_2 x_4 \vee$$

$$\vee \bar x_1 x_1 \bar x_2 \vee \bar x_1 x_4 =$$

$$= x_1 \bar x_2 \bar x_4 \vee x_1 \bar x_2 x_3 \vee x_3 x_4 \vee x_2 x_4 \vee \bar x_1 x_4$$

tekkinud DNK-avaldis on piisavalt keeruline, misjuhul tuleb proovida teda edasi lihtsustada kõigi võtetega, millega üldse saab DNK-d lihtsustada.

! *tüüpiline viga:*

selle avaldise **esimene** ja **neljas** liige :

$$x_1 \bar x_2 \bar x_4 \vee \ldots \vee x_2 x_4 \vee \ldots$$

. . . . **ei moodusta** neeldumist $x \vee \bar x y$

$$\ldots = x_1 \bar x_2 \bar x_4 \vee x_1 \bar x_2 x_3 \vee x_3 x_4 \vee x_2 x_4 \vee \bar x_1 x_4$$

on olemas ***4 võtet****, millega saab DNK-d edasi lihtsustada :*

otsime **neeldumist**: $x \vee x y$

otsime **neeldumist**: $x \vee \bar x y$

otsime **ühise teguri sulgude ette toomise** võimalust : $z(x \vee \bar x)$

otsime **ühise teguri sulgude ette toomise** võimalust : $z(x \vee \bar x y)$

? . . . . aga miks me ei taha tuua ühist tegurit z sulgude ette nii, et sulgudesse jääks avaldis $z(x \vee \bar x y)$?

. . . . kuna optimaalsel teisendamisel **ei tekki** sellist avaldist sulgudesse mitte kunagi, sest *neeldumine* toimuks seljuhul ära juba <u>enne</u> ühise teguri sulgude ette toomist — ehk *neeldumine* esineks seljuhul juba avaldises $z x \vee z \bar x y$

. . . teisendamisel tekkinud DNK-avaldises

$$= x_1 \bar x_2 \bar x_4 \vee x_1 \bar x_2 x_3 \vee x_3 x_4 \vee x_2 x_4 \vee \bar x_1 x_4$$

. . . . ei õnnestu rakendada nendest neljast lihtsustusvõttest mitte ühtegi.
Saadud DNK-avaldis ongi seega lõplikuks teisendustulemuseks.

(edaspidi tuleme selle näite juurde tagasi ja tuvastame Karnaugh' kaardi abil, et eelnevalt saadud DNK ei ole **MDNK** *)*

iseseisev vabatahtlik kodune lahendamine :

Lihtsusta loogikaavaldis (3-muutuja loogikafunktsioon)
loogikaalgebra põhiseoste ja *asendusseoste* abil

$$(x_1 \leftrightarrow x_3) \vee x_1(x_1 \to x_2)\overline{\overline{(x_1 \to x_3)}(x_3 \vee \bar x_2)} = \ldots$$

vastus:

$$\ldots = \bar{x}_1 \bar{x}_3 \vee x_1 x_3 \vee x_1 x_2$$

ülesanne:

Arvuta / Leia tõeväärtustabel eelnevalt saadud avaldisele :

$$x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_4 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee x_3 x_4 \vee x_2 x_4 \vee \bar{x}_1 x_4$$

ja samuti avaldisele :

$$x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_4 \vee x_3 x_4 \vee x_2 x_4 \vee \bar{x}_1 x_4$$

$x_1 x_2 x_3 x_4$	**pikem** avaldis	**lühem** avaldis
0 0 0 0		
0 0 0 1		
0 0 1 0		
0 0 1 1		
0 1 0 0		
0 1 0 1		
0 1 1 0		
0 1 1 1		
1 0 0 0		
1 0 0 1		
1 0 1 0		
1 0 1 1		
1 1 0 0		
1 1 0 1		
1 1 1 0		
1 1 1 1		

Kas need tõeväärtustabelid tulevad **samasugused** ?
Mida saame järeldada nende avaldiste kohta ja liikme $x_1 \bar{x}_2 x_3$ kohta ?

ülesanne:

Avaldada DNK-kujul avaldis

$$f\,(x_1 x_2 x_3) = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$$

on 2 võimalikku DNK-leidmisviisi :

1. *kasutades asendusseost* $x \oplus y = \bar{x} y \vee x \bar{y}$

$$x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 = (x_1 \oplus x_2) \oplus x_3 = (\bar{x}_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_2) \oplus x_3 =$$

$$= \overline{(\bar{x}_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_2)}\, x_3 \vee (\bar{x}_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_2)\, \bar{x}_3 =$$

$$= \overline{\bar{x}_1 x_2}\; \overline{x_1 \bar{x}_2}\; x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 =$$

$$= (x_1 \vee \bar{x}_2)(\bar{x}_1 \vee x_2)\, x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 =$$

$$= (x_1 \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_1 \vee x_1 x_2 \vee \bar{x}_2 x_2)\, x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 =$$

$$= (\bar{x}_2 \bar{x}_1 \vee x_1 x_2)\, x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 =$$

$$= \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$$

saime **täieliku DNK** (TDNK) kuna igas DNK liikmes leiduvad siin selle funktsiooni $f(x_1 x_2 x_3)$ **kõik** muutujad

püüame seda DNK-d edasi lihtsustada :

meenutame **4 võtet** , *millega üldse saab DNK-d edasi lihtsustada :*

neeldumine: $x \vee x\,y$ *pole võimalik TDNK korral*

neeldumine: $x \vee \bar{x}\,y$ *pole võimalik TDNK korral*

ühine tegur sulgude ette : $z\,(x \vee \bar{x}\,y)$ *pole võimalik TDNK korral*

? *. . . . MIKS pole need 3 teisendusvõtet kasutatavad TDNK peal* **?**

nendest neljast ainsana osutub võimalikuks TDNK jaoks :

ühine tegur sulgude ette : $z\,(x \vee \bar{x})$ ainult see on võimalik TDNK korral

$$. . . . = \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$$

. . . otsime siin TDNK-avaldises sellist võimalust tuua ühine tegur sulgude ette . . . .

selgub et siin ei leidu ainsatki sellist võimalust — seega ei saa seda TDNK-avaldist enam lihtsustada ehk teisendustulemuseks jääbki TDNK :

$$. . . . = \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$$

(*l a h e n d a t u d*)

2. sama ülesande **teine lahendusvõimalus** DNK saamiseks avaldisele $x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$:

avaldise $x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$ *teisendamise asemel koostame / arvutame talle* **tõeväärtustabeli** :

x_1	x_2	x_3	$x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$
0	0	0	
0	0	1	
0	1	0	
0	1	1	
1	0	0	
1	0	1	
1	1	0	
1	1	1	

x_1	x_2	x_3	$x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$
0	0	0	0
0	**0**	**1**	**1**
0	**1**	**0**	**1**
0	1	1	0
1	**0**	**0**	**1**
1	0	1	0
1	1	0	0
1	**1**	**1**	**1**

! DNK saadakse loogikafunktsiooni **1de piirkonnast !**

. . . . ja tõeväärtustabelist saab vahetult väljakirjutada just **TDNK**

kirjutame tõeväärtustabeli 1de piirkonnast välja TDNK elementaarkonjunktsioonid — need tulevad samad nagu saime ka teisendamisel :

$x_1\ x_2\ x_3$	$x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$	TDNK liikmed
0 0 0	0	
0 0 1	**1**	$\bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3$
0 1 0	**1**	$\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3$
0 1 1	0	
1 0 0	**1**	$x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$
1 0 1	0	
1 1 0	0	
1 1 1	**1**	$x_1 x_2 x_3$

$$x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \;=\; \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \;\vee\; \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \;\vee\; x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \;\vee\; x_1 x_2 x_3$$

. . . . eelnevalt saime XOR-avaldise lihtsustamisel :

$$x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \;=\; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \;=$$

$$=\; \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \;\vee\; x_1 x_2 x_3 \;\vee\; \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \;\vee\; x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$$

. . . . proovides l i h t s u s t a d a *tõeväärtustabelist* väljakirjutatud TDNK-d ? — osutub võimatuks.

(*l a h e n d a t u d*)

. . . . enne olid näitena 2 avaldist, kus tohib asendada tehte $\vee$ tehtega $\oplus$ (ilma seejuures avaldist loogiliselt muutmata / rikkumata) :

$$\bar{x}_1 x_2 \;\vee\; x_1 \bar{x}_2 \;=\; \bar{x}_1 x_2 \;\oplus\; x_1 \bar{x}_2$$

$$\bar{x}_1 x_2 x_3 \;\vee\; x_1 \bar{x}_2 x_3 \;=\; \bar{x}_1 x_2 x_3 \;\oplus\; x_1 \bar{x}_2 x_3$$

Need mõlemad DNK-avaldised on **täielik**ud DNK-d (TDNK).
Nüüd saadud DNK on samuti TDNK. Kas ka selles just saadud 4-liikmelises TDNK-avaldises tohib asendada $\vee$ tehtega $\oplus$ nii et avaldise tõeväärtustabel püsib muutumatuna ?

ülesanne:

Kontrolli (tõeväärtustabelit leides ja analüüsides) k a s eelnevalt saadud TDNK

$$\bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \;\vee\; x_1 x_2 x_3 \;\vee\; \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \;\vee\; x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$$

muutub või ei muutu *loogiliselt*, kui seal asendada tehe $\vee$ tehteks $\oplus$?

. . . . olles asendanud TDNK-s **VÕI**-tehte **VÄLISTAVAKS VÕI** -tehteks ($\vee$ tehteks $\oplus$) e i o l e selliselt muudetud avaldis enam TDNK ega üldse DNK.

Siin keskendub küsimus sellele, kas t õ e v ä ä r t u s t a b e l muutub või ei muutu, kui avaldises selline tehteasendus teha . . .

Leiame, kuidas väärtustub selle TDNK iga üksik *elementaarkonjunktsioon* $x_1 x_2 x_3$ kui asendame siia avaldisse *argumentvektoreid* .

$$\bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \;\vee\; x_1 x_2 x_3 \;\vee\; \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \;\vee\; x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$$

$$\begin{aligned}
f(000) &= 0 \vee 0 \vee 0 \vee 0 = \mathbf{0}\\
f(001) &= \mathbf{1} \vee 0 \vee 0 \vee 0 = \mathbf{1}\\
f(010) &= 0 \vee 0 \vee \mathbf{1} \vee 0 = \mathbf{1}\\
f(011) &= 0 \vee 0 \vee 0 \vee 0 = \mathbf{0}\\
f(100) &= 0 \vee 0 \vee 0 \vee \mathbf{1} = \mathbf{1}\\
f(101) &= 0 \vee 0 \vee 0 \vee 0 = \mathbf{0}\\
f(110) &= 0 \vee 0 \vee 0 \vee 0 = \mathbf{0}\\
f(111) &= 0 \vee \mathbf{1} \vee 0 \vee 0 = \mathbf{1}
\end{aligned}$$

Ilmneb, et mitte ükski muutujaväärtuste komplekt (*argumentvektor*) ei arvuta väärtust **1** TDNK m i t m e l e *elementaarkonjunktsioonile* — vaid arvutab **1**-ks täpselt ü h e a i n s a *elementaarkonjunktsiooni*.

Igas TDNK-s on täidetud tingimus, mille korral tehted $\vee$ ja $\oplus$ arvutavad avaldises "samaväärselt" ja neid tohib teineteisega asendada, ilma avaldist loogiliselt "rikkumata" :

$$\bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 =$$
$$= \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \oplus x_1 x_2 x_3 \oplus \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \oplus x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$$

ülesanne:

Lihtsusta loogikaavaldis
(*asendusseoste* ja *loogikaalgebra põhiseoste* abil)

$$x_1 \, \overline{x_1 \oplus x_2} \oplus x_1 x_2 = \;.\;.\;.$$

$$. \; . \; . = x_1 (x_1 \leftrightarrow x_2) \oplus x_1 x_2 =$$
$$= x_1 (\bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee x_1 x_2) \oplus x_1 x_2 =$$
$$= (x_1 \bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee x_1 x_1 x_2) \oplus x_1 x_2 =$$
$$= (0 \vee x_1 x_2) \oplus x_1 x_2 =$$
$$= x_1 x_2 \oplus x_1 x_2 =$$
$$= 0$$

iseseisev vabatahtlik kodune lahendamine:

rohelise õpiku **lk. 205** viimased 2 ülesannet . . . .
(. . . . *mida me ei lahendanud ära tunnis*)

ülesanne:

Kirjuta tõeväärtustabelist välja selle funktsiooni TDNK ja lihtsusta see *loogikaalgebra põhiseoste* abil MDNK-ks

$x_1\, x_2\, x_3$	$f\,(x_1\, x_2\, x_3)$
0 0 0	**1**
0 0 1	**0**
0 1 0	**1**
0 1 1	**1**
1 0 0	**0**
1 0 1	**1**
1 1 0	**1**
1 1 1	**1**

$$f(x_1 x_2 x_3) = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 x_2 x_3 = \ldots$$

jälle meenutame **4 võtet** *, millega saab DNK-d edasi lihtsustada :*

neeldumine: $x \vee x y$ *pole võimalik TDNK korral*

neeldumine: $x \vee \bar{x} y$ *pole võimalik TDNK korral*

ühine tegur sulgude ette : $z(x \vee \bar{x} y)$ *pole võimalik TDNK korral*

ühine tegur sulgude ette : $z(x \vee \bar{x})$ ainult see on võimalik TDNK korral

$$\ldots = \bar{x}_1 \bar{x}_3 (\bar{x}_2 \vee x_2) \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 (\bar{x}_3 \vee x_3) =$$

$$= \bar{x}_1 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 = \ldots$$

on tekkinud DNK-avaldis, kus nüüd juba leiduvad **erinevate tegurite arvuga** *elementaarkonjunktsioonid* — misjuhul v õ i b nüüd leiduda ka **neeldumisi** :

$x \vee x y$

$x \vee \bar{x} y$

. . . . ja nüüd saab leiduda võimalusi *ühist tegurit sulgude ette tuua* ka nii:

$z(x \vee \bar{x} y)$

$$\ldots = \bar{x}_1 (\bar{x}_3 \vee x_2 x_3) \vee x_1 (\bar{x}_2 x_3 \vee x_2) =$$

$$= \bar{x}_1 (\bar{x}_3 \vee x_2) \vee x_1 (x_3 \vee x_2) =$$

$$= \bar{x}_1 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \vee x_1 x_3 \vee x_1 x_2 = \ldots$$

. . . siit edasi saab leiduda ainult teisendussamm : $z(x \vee \bar{x})$ kuna tekkinud DNK kõik *elementaarkonjunktsioonid* on (võrdselt) **kahe** algtermiga

$$\ldots = \bar{x}_1 \bar{x}_3 \vee x_2 (\bar{x}_1 \vee x_1) \vee x_1 x_3 =$$

$$= \bar{x}_1 \bar{x}_3 \vee x_2 \vee x_1 x_3$$

teisendustulemuseks saadud DNK on **MDNK**

iseseisev vabatahtlik kodune lahendamine :

Lihtsusta eelnev TDNK veelkord samaks MDNK-ks , alustades esimesel teisendussammul <u>senisest erinevalt</u> :

$$f(x_1 x_2 x_3) = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 x_2 x_3 =$$

$$= \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_2 \bar{x}_3 (\bar{x}_1 \vee x_1) \vee x_2 x_3 (\bar{x}_1 \vee x_1) \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 =$$

$$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots =$$

$$= \bar{x}_1 \bar{x}_3 \vee x_2 \vee x_1 x_3$$

Loogikaavaldiste teisenduste kokkuvõtteks

Kõik teisendusnäited viitavad, et avaldiste käsitsi lihtsustamise tulemuseks on enamasti **Disjunktiivne Normaalkuju** (**DNK**)

Meenutame varasemat ülesannet, kus koostati **viie** *tõeväärtustabeli* jaoks neid esitavad **loogikaavaldisi** :

$x_1\,x_2$	f_e	f_t	f_k	f_n	f_v
0 0	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**
0 1	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**
1 0	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**
1 1	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**
	avaldised: $\overline{x_1 \to x_2}$ $\overline{\bar{x}_1 \vee x_2}$ $x_1\,\bar{x}_2$	*avaldised:* $x_1 \leftrightarrow x_2$ $\bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_1 x_2$ $(x_1 \vee \bar{x}_2)(\bar{x}_1 \vee x_2)$ $\overline{\bar{x}_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_2}$	*avaldised:* $x_2 \to x_1$ $\bar{x}_1 \to \bar{x}_2$ $x_1 \vee \bar{x}_2$ $\overline{\bar{x}_1\,x_2}$	*avaldised:* $\bar{x}_2$ $\bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_1\bar{x}_2$ $(x_1 \vee \bar{x}_2)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2)$	*avaldis:* **1**

Siin on igale 2-muutuja funktsioonile (igale *tõeväärtustabelile*) esitatud kuni **4** sobivat loogikaavaldist.

iseseisev vabatahtlik kodune lahendamine :

Leia teisendussammud, kuidas eelnevas tabelis näidatud . . . .

iga **punane** avaldis teisendub (samas veerus olevaks) **siniseks** avaldiseks ;

iga **sinine** avaldis teisendub (samas veerus olevaks) **roheliseks** avaldiseks.