4. kirjutame välja **MKNK** ühele ridadevalikule (näiteks esimesele :)

$$f \;=\; (A2)(A3)(A4)$$

$x_1\ x_2\ x_3\ x_4$ ← vektoresituse järkudele vastavad **muutujad**

MKNK liikmed (*elementaardisjunktsioonid*)

A2	— — 0 1	$(x_3 \vee \overline{x}_4)$
A3	— 1 0 —	$(\overline{x}_2 \vee x_3)$
A4	1 — — 1	$(\overline{x}_1 \vee \overline{x}_4)$

MKNK : $f \;=\; (x_3 \vee \overline{x}_4)(\overline{x}_2 \vee x_3)(\overline{x}_1 \vee \overline{x}_4)$

l a h e n d a t u d :

MDNK ja **MKNK** leitud *McCluskey'* meetodi **intervallmodifikatsiooniga** mõlemad minimaalsed normaalkujud tulid samad nagu eelnevalt saime **Karnaugh' kaardiga** sama funktsiooni minimeerides.

pane tähele :

3 erinevat **MKNK**-avaldist (mis on lahenditeks valitavad **McCluskey' meetodis**) on needsamad 3 lahendit, millele viitab ka **Karnaugh' kaart** — vaatasime neid eelmine tund **MKNK** leidmisel :

1	0	—	1
0	0	1	1
0	0	0	—
1	0	0	1

1	0	—	1
0	0	1	1
0	0	0	—
1	0	0	1

1	0	—	1
0	0	1	1
0	0	0	—
1	0	0	1

näide: *meetodi* **10nd**modifikatsioon *sama funktsiooni jaoks:*

Leida **McCluskey' meetodi 10nd**modifikatsiooniga MDNK ja MKNK samale eelnevale (osaliselt määratud) loogikafunktsioonile:

$$f(x_1 \ldots x_4) = \sum(0, 2, 6, 7, 8, 10)_1 \prod(1, 4, 5, 9, 11, 12, 13, 15)_0 \; (3, 14)_{—}$$

see on sama funktsioon, mille tõeväärtustabel paiknes kaardil:

$x_1x_2 \backslash x_3x_4$	00	01	11	10
00	1	0	—	1
01	0	0	1	1
11	0	0	0	—
10	1	0	0	1

$x_1x_2 \backslash x_3x_4$	00	01	11	10
00	1	0	—	1
01	0	0	1	1
11	0	0	0	—
10	1	0	0	1

. . . . kuid nüüd leiame minimaalsed normaalkujud McCluskey' meetodiga

MDNK leidmine:

Lisada *määramatuspiirkond* juurde **1**-de piirkonnale, saame (määramatuspiirkonnaga) *laiendatud 1de piirkonna*.

Sellise laiendatud 1-de piirkonna $\sum(0, 2, 6, 7, 8, 10, 3^*, 14^*)_1$ jaotame lahtritesse vastavalt arvude *indeksile* (ehk alustame **kleepimistabelit**) :

index	laiend. **1**de pk.	**2**-sed interv.	vahe	**4**-sed interv.	vahe
0	0				
1	2 8				
2	3* 6 10				
3	7 14*				
4					

10ndmodifikatsiooni esimese kleepimissammu **kleepimisreeglid**:

1. kleepida saab ainult naaberlahtrite arve

2. kleebitavate arvude väärtuste vahe peab olema $\mathbf{2^n}$ (1 2 4 8 16 32 . . .)

3. väiksema indeksiga (ehk ülemisest) lahtrist võetud kleebitav arv peab olema väiksem kui suurema indeksiga (ehk alumisest) lahtrist võetud temaga kokkukleebitav arv (ehk: ülevalt **väiksem** arv ja alt **suurem** arv kokku)

index	laiend. **1**de pk.	**2**-sed interv.	vahe	**4**-sed interv.	vahe
0	0	0 — 2	2		
1	2	0 — 8	8		
	8				
2	3*	2 — 3*	1		
	6	2 — 6	4		
	10	2 — 10	8		
		8 — 10	2		
3	7				
	14*	3 — 7	4		
4		6 — 7	1		
		6 — 14*	8		
		10 — 14*	4		

kleepimisreeglid annavad kleepimistulemusteks ainult sellised 10ndarvude grupid, mis 2ndkujul moodustavad **intervalli**.

Kleepimine jätkub niikaua kui võimalik.
Järgmisel kleepimissammul kleebitakse 2-seid gruppe/intervalle kokku suuremateks ehk neljasteks gruppideks/intervallideks.

teise ja järgnevate kleepimissammude **kleepimisreeglid** (**10nd**modifikatsiooni korral) :

1. kleepida saab ainult selliseid naaberlahtrite gruppe, millel on **sama vahe**

2. kleebitavate arvugruppide omavaheline vahe (nn. "uus vahe") peab olema samuti $\mathbf{2^n}$

3. väiksema indeksiga (ehk ülemisest) lahtrist võetud vastavad arvud peavad olema ka väärtuselt väiksemad kui suurema indeksiga (ehk alumisest) lahtrist pärit nende kleepimispaarilised <

Teise kleepimissammu tulemusel saadud 4-sed grupid / intervallid :

index	laiend. **1**de pk.	**2**-sed interv.	vahe	**4**-sed interv.	vahe
0	0	0 — 2	2	0 - 2 - 8 - 10	2, 8
1	2	0 — 8	8	0 - 8 - 2 - 10	8, 2
	8			2 - 3* - 6 - 7	1, 4
				2 - 6 - 10 - 14*	4, 8
2	3*	2 — 3*	1	2 - 6 - 3* - 7	4, 1
	6	2 — 6	4		
	10	2 — 10	8		
		8 — 10	2		
3	7				
	14*	3 — 7	4		
4		6 — 7	1		
		6 — 14*	8		
		10 — 14*	4		

edasi proovime kleepimist jätkata ehk **4**-seid gruppe kokkukleepida **8**-steks . . .
kuid rohkem ei õnnestu kleepida — pole isegi kandidaate.
Sellega on kleepimistabel valminud.

(siin kleepimistabelis ei kasutata "Kleepimisel Kasutatud" märgendiveergu **K** mille võib siia lisada. KUI märgendiveergu ei kasutata, siis **lihtimplikandid** valminud kleepimistabelis valitakse selliselt sõnastatava eeskirjaga:

" *kleepimistabelis tekkinud arvude grupp on* **lihtimplikant**, *kui ta tervikuna ei sisaldu* (siin tabelis) *üheski teises arvude grupis* ")

tekkinud suurimad 1-de intervallid (*lihtimplikandid*)

Valminud kleepimistabelis märgistame ära **suurimad grupid** (suurimad *ühtede* intervallid) — grupid mis ei sisaldu tervikuna üheski teises grupis siin kleepimistabelis :

(suurimaid **1**-de **piirkonna intervalle** nimetatakse ka **lihtimplikantideks**) leiame / märgime lihtimplikandid **A1 A2 A3** . . . .

index	laiend. **1**de pk.	**2**-sed interv.	vahe	**4**-sed interv.	vahe
0	0	0 — 2	2	0 - 2 - 8 - 10 **A1**	2, 8
1	2	0 — 8	8	0 - 8 - 2 - 10	8, 2
	8			2 - 3* - 6 - 7 **A2**	1, 4
				2 - 6 - 10 - 14* **A3**	4, 8
2	3*	2 — 3*	1	2 - 6 - 3* - 7	4, 1
	6	2 — 6	4		
	10	2 — 10	8		
		8 — 10	2		
3	7				
	14*	3 — 7	4		
4		6 — 7	1		
		6 — 14*	8		
		10 — 14*	4		

katmistabel

koostame *katmistabeli* , mis näitab kuidas märgistatud intervallid (siin: **A1 A2 A3**) katavad 1-de piirkonda:

lihtimpl. \ laiend. 1de pk.	**0**	**2**	**3***	**6**	**7**	**8**	**10**	**14***
A1	1	1				1	1	
A2		1	1	1	1			
A3		1		1			1	1

kust saame siia *katmistabelisse* **veergudeks** olevad **arvud ?**

MINIMAALSE KATTE valimine

valime katmistabelis **minimaalse arvu ridu**, mis koos kataksid märgenditega (siin: **1**-dega) kõik **ilma tärnita** veerud:

lihtimp. \ laiend. 1de pk.	**0**	**2**	**3***	**6**	**7**	**8**	**10**	**14***	
A1	1	1				1	1		← valitud
A2		1	1	1	1				← valitud
A3		1		1			1	1	

MDNK on seega tekkimas 2-liikmeline : f = **A1** ∨ **A2**

esindajate tabel

lahendisse valitud iga intervalli (siin: **A1 A2**) koosseisust :

0 - 2 - 8 - 10 A1
2 - 3 - 6 - 7 A2

. . . . valime esindajaks suvalise seal sisalduva 10ndarvu ja märgime selle **2nd**kuju *esindajate tabelisse* :

	$x_1\ x_2\ x_3\ x_4$	← järkudele vastavad muutujad
	8 4 2 1	← 2ndsüsteemi järgukaalud
A1	0 0 0 0	← A1 esindajaks on valitud **0**
A2	0 0 1 0	← A2 esindajaks on valitud **2**

elimineerime ärajäävad järgud / muutujad

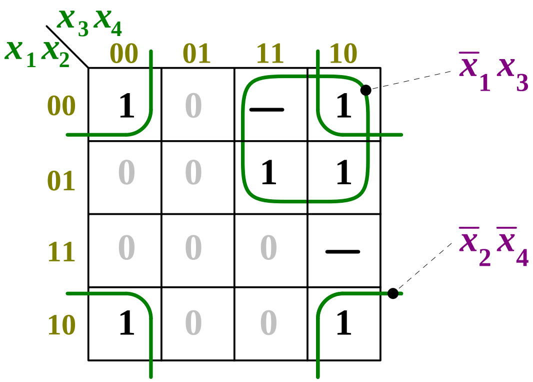
vaatame eespoolt kleepimistabelist, millised **vahed** kaasnesid nende gruppidega:

. . . .
0 - 2 - 8 - 10 **A1** **2 , 8**
2 - 3 - 6 - 7 **A2** **1 , 4**
. . . .

	$x_1\ x_2\ x_3\ x_4$	**MDNK liikmed**
	8 4 2 1	
A1	⊠ 0 ⊠ 0	$\bar{x}_2\ \bar{x}_4$
A2	0 ⊠ 1 ⊠	$\bar{x}_1\ x_3$

MDNK : $f = \bar{x}_2 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 x_3$

oleme saanud **McCluskey' meetodiga** sama tulemuse, mille varem saime samale funktsioonile **Karnaugh' kaardiga** :



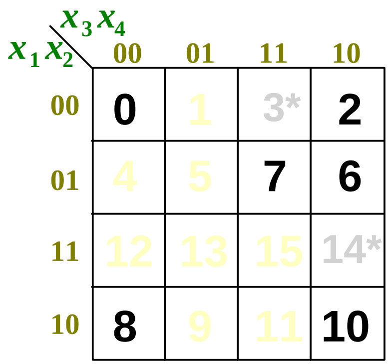
McCluskey' meetodi toimimise võrdlus Karnaugh' kaardi toimimisega

esimesel kleepimissammul tekkisid **2-sed grupid** / intervallid :

index	laiend. **1**de pk.	**2**-sed interv.	vahe	**4**-sed interv.	vahe
0	0	**0 — 2**	2		
1	2	**0 — 8**	8		
	8				
2	3*	**2 — 3***	1		
	6	**2 — 6**	4		
	10	**2 — 10**	8		
		8 — 10	2		
3	7				
	14*	**3 — 7**	4		
4		**6 — 7**	1		
		6 — 14*	8		
		10 — 14*	4		

vaatame, kus asuvad vastavad ruudud 4muutuja Karnaugh' kaardil.

Järgneval kaardil on näidatud sama funktsiooni **1**-*de piirkond* ja *määramatuspiirkond* , rõhutades vastavate ruutude **10nd**ekvivalente :



1de piirkonna ruutude 10ndarvud

Ilmneb, et kleepimistabelisse tekkinud iga **2ne grupp** vastab ühele **2-ruudulisele kontuurile**.

Sisuliselt McCluskey' meetod koostas kleepimistabelisse (Karnaugh' kaardi mõistes) <u>kõikvõimalikud 2-ruudulised kontuurid</u>.

Teine kleepimissamm andis **4-sed grupid** / intervallid (3 tk. unikaalseid):

index	laiend. **1**de pk.	**2**-sed interv.	vahe	**4**-sed interv.	vahe
0	0	0 — 2	2	**0 - 2 - 8 - 10**	2, 8
1	2	0 — 8	8	0 - 8 - 2 - 10	8, 2
	8			**2 - 3* - 6 - 7**	1, 4
				2 - 6 - 10 - 14*	4, 8
2	3*	2 — 3*	1	2 - 6 - 3* - 7	4, 1
	6	2 — 6	4		
	10	2 — 10	8		
		8 — 10	2		
3	7				
	14*	3 — 7	4		
4		6 — 7	1		
		6 — 14*	8		
		10 — 14*	4		

iga **4ne grupp** kleepimistabelis vastab ühele **4-ruudulisele kontuurile** :

x_1x_2 \ x_3x_4	00	01	11	10
00	0	1	3*	2
01	4	5	7	6
11	12	13	15	14*
10	8	9	11	10

McCluskey' meetodi kleepimistabelis gruppide / *intervallide* kasvatamine suuremaks on sama mis Karnaugh' kaardil *kontuuride* kasvatamine.

kui McCluskey' meetod võimaldaks kleepida *neljaseid* intervalle suuremateks ehk *kaheksasteks*, siis peaks vastaval Karnaugh' kaardil saama valida ka **8-ruudulist kontuuri**

(kaardil näeme, et ei saa valida 8-ruudulist kontuuri ei **0**-de ega **1**-de katmiseks — misjuhul ei tohi ka McCluskey' meetod lubada kleepida intervalli suurusega **8**)

MKNK leidmine:

Kõik tuleb teha **duaalselt vastupidi** MDNK leidmise suhtes.

Lisada *määramatuspiirkond* juurde **0**-de piirkonnale, saame (määramatuspiirkonnaga) *laiendatud 0de piirkonna*.

Sellise laiendatud 0-de piirkonna Π(**1**, **4**, **5**, **9**, **11**, **12**, **13**, **15**, **3***, **14***)$_0$ jaotame lahtritesse vastavalt arvude *indeksile* (ehk alustame **kleepimistabelit**) :

index	laiend. **0**de pk.	**2**-sed interv.	vahe	**4**-sed interv.	vahe
0					
1	1				
	4				
2	3*				
	5				
	9				
	12				
3	11				
	13				
	14*				
4	15				

kleepimisreeglid on täpselt samad nagu olid ka MDNK leidmisel !

kleepides kõikvõimalikud 2sed grupid :

index	laiend. **0**de pk.	**2**-sed interv.	vahe	**4**-sed interv.	vahe
0		1 — 3*	2		
1	1	1 — 5	4		
	4	1 — 9	8		
		4 — 5	1		
		4 — 12	8		
2	3*	3*— 11	8		
	5	5 — 13	8		
	9	9 — 11	2		
	12	9 — 13	4		
3	11	12 — 13	1		
	13	12 — 14*	2		
	14*	11 — 15	4		
4	15	13 — 15	2		
		14* — 15	1		

kleepides unikaalsed 4sed grupid : (ära on jäetud korduvad / dubleerivad)

index	laiend. **0**de pk.	**2**-sed interv.	vahe	**4**-sed interv.	vahe
0		1 — 3*	2	1 - 3* - 9 - 11	2, 8
1	1	1 — 5	4	1 - 5 - 9 - 13	4, 8
	4	1 — 9	8	4 - 5 - 12 - 13	1, 8
		4 — 5	1		
		4 — 12	8		
2	3*	3*— 11	8	9 - 11 - 13 - 15	2, 4
	5	5 — 13	8	12 - 13 - 14* - 15	1, 2

	9	9 — 11	2	
	12	9 — 13	4	
3	11	12 — 13	1	
	13	12 — 14*	2	
	14*	11 — 15	4	
4	15	13 — 15	2	
		14* — 15	1	

. . . . sellega on kleepimistabel valminud

tekkinud suurimad 0-de intervallid

Valminud kleepimistabelis märgistame ära **suurimad grupid** (suurimad *nullide* intervallid) — grupid mis ei sisaldu tervikuna üheski teises grupis siin kleepimistabelis :

index	laiend. **0**de pk.	**2**-sed interv.	vahe	**4**-sed interv.	vahe
0		1 — 3*	2	1 - 3* - 9 - 11 **A1**	2, 8
1	1	1 — 5	4	1 - 5 - 9 - 13 **A2**	4, 8
	4	1 — 9	8	4 - 5 - 12 - 13 **A3**	1, 8
		4 — 5	1		
		4 — 12	8		
2	3*	3*— 11	8	9 - 11 - 13 - 15 **A4**	2, 4
	5	5 — 13	8	12 - 13 - 14* - 15 **A5**	1, 2
	9	9 — 11	2		
	12	9 — 13	4		
3	11	12 — 13	1		
	13	12 — 14*	2		
	14*	11 — 15	4		
4	15	13 — 15	2		
		14* — 15	1		

katmistabel (minimaalse katte valimiseks)

valime katmistabelis **minimaalse arvu ridu**, mis koos kataksid märgenditega (siin: **0**-dega) kõik **ilma tärnita** veerud:

0de intervall \ laiend. **0**de pk.	**1**	**3***	**4**	**5**	**9**	**11**	**12**	**13**	**14***	**15**
A1	0	0			0	0				
A2	0			0	0			0		
A3			0	0			0	0		
A4					0	0		0		0
A5							0	0	0	0

tärnita veergude katmiseks on siin katmistabelis vajalik valida 3 rida.
Leidub 3 erinevat sobivat ridadekomplekti:

esimene võimalik MKNK : ***f*** = **(A2) (A3) (A4)**

teine võimalik MKNK : ***f*** = **(A1) (A3) (A4)**

kolmas võimalik MKNK : ***f*** = **(A1) (A3) (A5)**

ridadevalik **(A2) (A3) (A5)** ei sobi ! (kuna jätavad katmata veeru **11**)

esimene võimalik sobiv ridadevalik:

0de intervall \ laiend. **0**de pk.	**1**	**3***	**4**	**5**	**9**	**11**	**12**	**13**	**14***	**15**	
A1	0	0			0	0					
A2	0			0	0			0			← valitud
A3			0	0			0	0			← valitud
A4					0	0		0		0	← valitud
A5							0	0	0	0	

teine võimalik sobiv ridadevalik:

0de intervall \ laiend. **0**de pk.	**1**	**3***	**4**	**5**	**9**	**11**	**12**	**13**	**14***	**15**	
A1	0	0			0	0					← valitud
A2	0			0	0			0			
A3			0	0			0	0			← valitud
A4					0	0		0		0	← valitud
A5							0	0	0	0	

kolmas võimalik sobiv ridadevalik:

0de intervall \ laiend. **0**de pk.	**1**	**3***	**4**	**5**	**9**	**11**	**12**	**13**	**14***	**15**	
A1	0	0			0	0					← valitud
A2	0			0	0			0			
A3			0	0			0	0			← valitud
A4					0	0		0		0	

A5							0	0	0	0

← valitud

miks näitame katmistabelis ***tärnidega*** *veerge* *****
kuigi neid veerge ei ole vaja "katta" valitavate ridadega **?**

esindajate tabel ridadevalikule / lahendile $f = (A2)(A3)(A4)$

lahendisse valitud iga intervalli (siin: **A2 A3 A4**) koosseisust valime esindajaks suvalise seal sisalduva 10ndarvu ja märgime selle **2ndkuju** *esindajate tabelisse* :

$x_1 x_2 x_3 x_4$ ← järkudele vastavad muutujad

8 4 2 1 ← 2ndsüsteemi järgukaalud

A2	0 0 0 1	← A2 esindajaks on valitud **1**
A3	1 1 0 0	← A3 esindajaks on valitud **12**
A4	1 1 1 1	← A4 esindajaks on valitud **15**

elimineerime ärajäävad järgud / muutujad

vaatame eespoolt kleepimistabelist, millised **vahed** kaasnesid nende gruppidega:

. . . .

1 - 5 - 9 - 13	**A2**	**4 , 8**
4 - 5 - 12 - 13	**A3**	**1 , 8**
9 - 11 - 13 - 15	**A4**	**2 , 4**

. . . .

	x_1 x_2 x_3 x_4 8 4 2 1	**MKNK liikmed**
A2	$\cancel{0}$ $\cancel{0}$ **0** **1**	$(x_3 \vee \bar{x}_4)$
A3	$\cancel{1}$ **1** **0** $\cancel{0}$	$(\bar{x}_2 \vee x_3)$
A4	**1** $\cancel{1}$ $\cancel{1}$ **1**	$(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_4)$

MKNK : $f = (x_3 \vee \bar{x}_4)(\bar{x}_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_4)$

ülesanne lahendatud: **MDNK** ja **MKNK** leitud McCluskey' meetodiga

pane tähele :

3 erinevat MKNK-avaldist (mis on lahenditeks valitavad **McCluskey' meetodis**) on needsamad 3 lahendit, millele viitab ka **Karnaugh' kaart :**

1	0	—	1
0	0	1	1
0	0	0	—
1	0	0	1

1	0	—	1
0	0	1	1
0	0	0	—
1	0	0	1

1	0	—	1
0	0	1	1
0	0	0	—
1	0	0	1

millise lahendi oleksime saanud, kui oleksime valinud intervalli esindajaks mõne muu sealse arvu / liikme ?

vaatleme lahendisse kuuluvat intervalli **A3** : **4 - 5 - 12 - 13** (vahedega **1 , 8**)

ja valime ühekaupa tema esindajaks **kõik** tema koosseisu kuuluvad arvud :

intervalli / grupi esindaja **2nd**kuju *esindajate tabelis*

kui oleksime valinud . . . .

	x_1 x_2 x_3 x_4 8 4 2 1	
A3	**0 1 0 0**	← . . . . esindajaks **4**
A3	**0 1 0 1**	← . . . . esindajaks **5**
A3	**1 1 0 0**	← valisimegi esindajaks **12**
A3	**1 1 0 1**	← . . . . esindajaks **13**

normaalkuju liige **ei olene** valitud konkr. esindajast:

	x_1 x_2 x_3 x_4 8 4 2 1	**saadav MKNK liige**	kui oleksime valinud . . . .
A3	$\cancel{0}$ **1** **0** $\cancel{0}$	$(\bar{x}_2 \vee x_3)$	← . . . . esindajaks **4**
A3	$\cancel{0}$ **1** **0** $\cancel{1}$	$(\bar{x}_2 \vee x_3)$	← . . . . esindajaks **5**
A3	$\cancel{1}$ **1** **0** $\cancel{0}$	$(\bar{x}_2 \vee x_3)$	← valisimegi esindajaks **12**
A3	$\cancel{1}$ **1** **0** $\cancel{1}$	$(\bar{x}_2 \vee x_3)$	← . . . . esindajaks **13**