McCluskey' minimeerimismeetod

probleem :

Karnaugh' kaart on **visuaalheuristiline** minimeerimismeetod.

(vajalike kontuuride **otsene vahetu** väljavalimine pole algoritmina kirjeldatav)

Karnaugh' kaart sobib kuni *6-muutujaga* loogikafunktsioonide jaoks;

McCluskey' minimeerimismeetodi head omadused :

McCluskey' meetodis ei ole *muutujate arv* piiratud

McCluskey' meetod on **algoritm** — saab realiseerida **arvutiprogrammina**

Selle minimeerimismeetodi imiteerimine "käsitsi paberil" on mahukas töö.
Vaatleme seda meetodit ainult väikestel funktsioonidel / näidetel.

McCluskey' meetodist on olemas **intervallmodifikatsioon** ja **10ndmodifikatsioon**.

Järgnev näide esitab *intervallmodifikatsiooni* — mis on eelistatum.

termin **indeks** :

2ndvektori **indeks** on **1**-de arv tema koosseisus : **0101** *indeks* on **2**

ülesanne:

Leida **McCluskey' meetodiga** MDNK ja MKNK eelnevalt *Karnaugh' kaardi* abil minimeeritud osaliselt määratud funktsioonile:

$$f(x_1 \dots x_4) = \sum(0, 2, 6, 7, 8, 10)_1 \prod(1, 4, 5, 9, 11, 12, 13, 15)_0 \ (3, 14)_{-}$$

see on sama funktsioon, mille tõeväärtustabel paiknes kaardil:

$x_1x_2 \backslash x_3x_4$	00	01	11	10
00	1	0	—	1
01	0	0	1	1
11	0	0	0	—
10	1	0	0	1

$x_1x_2 \backslash x_3x_4$	00	01	11	10
00	1	0	—	1
01	0	0	1	1
11	0	0	0	—
10	1	0	0	1

. . . . kuid nüüd leiame minimaalsed normaalkujud McCluskey' meetodiga

MDNK leidmine:

Lisada *määramatuspiirkond* (siin: 3 ja 14) **1**-de piirkonnale, saame (määramatuspiirkonnaga) *laiendatud 1de piirkonna.*

Sellise laiendatud 1-de piirkonna $\sum(\mathbf{0, 2, 6, 7, 8, 10}, \mathbf{3^*, 14^*})_1$ *argumentvektorid* (2ndvektorid) jaotame lahtritesse vastavalt nende *indeksile* (ehk alustame **kleepimistabelit**)

1. jaotame vajaliku piirkonna (siin: laiendatud **1**-de piirkonna) **kleepimistabeli** esimesse veergu lahtritesse vastavalt *indeksitelele* :

index	laiend. **1**de pk.	K**?**	**2**-sed interv.	K**?**	**4**-sed interv.	K**?**
0	**0 0 0 0**					
1	**0 0 1 0** **1 0 0 0**					
2	**0 0 1 1*** **0 1 1 0** **1 0 1 0**					
3	**0 1 1 1** **1 1 1 0***					
4						

2. teeme kõikvõimalikud *kleepimised* ehk **koostame kleepimistabeli** :

intervallmodifikatsiooni esimese kleepimissammu **kleepimisreegel** :

teineteisega kokkukleepida saab ainult naaberlahtrites asuvaid **lähiskoode** (sama rida/koodi saab kleepida **korduvalt** ehk mitme erineva muu reaga naaberlahtrites)

tärn * ei tähenda kleepimise jaoks mitte midagi — kõik read võivad osaleda.

esimese kleepimissammu tulemusteks tekkivad kleepimistabelisse järgmisesse veergu *kahesed* **intervallid** :

index	laiend. **1**de pk.	K?	**2**-sed interv.	K?	**4**-sed interv.	K?
0	**0 0 0 0**	K	**0 0 — 0**			
1	**0 0 1 0** **1 0 0 0**	K K	**— 0 0 0**			
2	**0 0 1 1*** **0 1 1 0** **1 0 1 0**	K K K	**0 0 1 —** **0 — 1 0** **— 0 1 0** **1 0 — 0**			
3	**0 1 1 1** **1 1 1 0***	K K	**0 — 1 1** **0 1 1 —** **— 1 1 0** **1 — 1 0**			
4						

Kleepimine jätkub niikaua kui võimalik.

Järgmisel kleepimissammul kleebitakse 2-seid intervalle kokku suuremateks ehk *neljasteks* intervallideks (kus vektoresituses on juba 2 kriipsu —).

teise ja järgnevate kleepimissammude **kleepimisreegel** :

kleepida saab ainult selliseid naaberlahtrite intervalle, millel on omavaheline erinevus täpselt **ühesainsas** **olulises järgus**

ehk kleebitavate intervallide vektoresituste paar peab olema kujul :

. . . . **0** . . . .   või   . . . . **1** . . . .
. . . . **1** . . . . **0** . . . .

mitte :

. . . . **0** . . . . **—** . . . . **1** . . . . **—** . . . .
. . . . **—** . . . . **0** . . . . **—** . . . . **1** . . . .

eelnevad neli vektoresituste punast paari **ei ole** kleebitavad **!**

kleepimisel tekkivad **korduvad** / samasugused intervallid võib jätta lisamata — kuna nad on juba olemas ehk on varem tekkinud samasse lahtrisse.

Teise kleepimissammu tulemusel saadud **4**-sed **intervallid** :

index	laiend. **1**de pk.	K?	**2**-sed interv.	K?	**4**-sed interv.	K?
0	**0 0 0 0**	K	**0 0 — 0**	K	**— 0 — 0**	
1	**0 0 1 0** **1 0 0 0**	K K	**— 0 0 0**	K	**0 — 1 —** **— — 1 0**	
2	**0 0 1 1*** **0 1 1 0** **1 0 1 0**	K K K	**0 0 1 —** **0 — 1 0** **— 0 1 0** **1 0 — 0**	K K K K		
3	**0 1 1 1** **1 1 1 0***	K K	**0 — 1 1** **0 1 1 —** **— 1 1 0** **1 — 1 0**	K K K K		
4						

edasi proovime kleepida tekkinud 4seid intervalle veel suuremateks ehk 8-teks intervallideks . . . . ja näeme et rohkem kleepida enam ei õnnestu. Sellega on kleepimistabel valminud.

märgend **K** tähendab: "**K**leebitud" ehk "**K**asutatud": **K**asutatud **K**leepimisel

3. märgime moodustunud kleepimistabelis **lihtimplikandid** :

(milleks on **kõik** need read, mille järel puudub märgend **K**)

index	laiend. 1de pk.	K?	2-sed interv.	K?	4-sed interv.	K?
0	**0 0 0 0**	K	**0 0 — 0**	K	**— 0 — 0**	A1
1	**0 0 1 0**	K	**— 0 0 0**	K		
	1 0 0 0	K			**0 — 1 —**	A2
					— — 1 0	A3
2	**0 0 1 1***	K	**0 0 1 —**	K		
	0 1 1 0	K	**0 — 1 0**	K		
	1 0 1 0	K	**— 0 1 0**	K		
			1 0 — 0	K		
3	**0 1 1 1**	K	**0 — 1 1**	K		
	1 1 1 0*	K	**0 1 1 —**	K		
4			**— 1 1 0**	K		
			1 — 1 0	K		

(suurimaid 1-de **piirkonna intervalle** nimetatakse ka **lihtimplikantideks**)

sellest näitest **ei pea** järeldama, nagu peaks **kõik read** saama lõpuks kleepimistabelist märke : **K**

katmistabel

koostame *katmistabeli* , mis näitab kuidas märgistatud intervallid (siin: *lihtimplikandid* **A1 A2 A3**) "katavad" **1**-de piirkonda:

lihtimpl. \ laiend. 1de pk.	0	2	3*	6	7	8	10	14*
A1	1	1				1	1	
A2		1	1	1	1			
A3		1		1			1	1

kust saame siia *katmistabelisse* **veergudeks** olevad **arvud** ?

. . . . algsest laiendatud **1**de piirkonnast :

$\sum$(**0, 2, 6, 7, 8, 10, 3*, 14***) $_1$

kust saame *katmistabelisse* **märgendid** (näiteks "**1**") ?

. . . . vaatame veelkord kleepimisel tekkinud *lihtimplikante :*

A1	—	0	—	0
A2	0	—	1	—
A3	—	—	1	0

MINIMAALSE KATTE valimine

valime katmistabelis **minimaalse arvu ridu**, mis koos kataksid märgenditega (siin: **1**-dega) kõik **ilma tärnita** veerud:

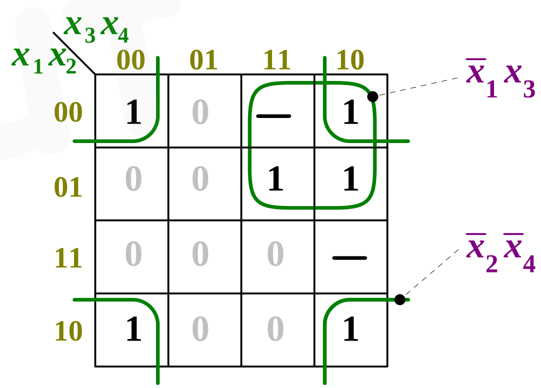
lihtimp. \ laiend. 1de pk.	0	2	3*	6	7	8	10	14*	
A1	1	1				1	1		← valitud
A2		1	1	1	1				← valitud
A3		1		1			1	1	

MDNK on seega tekkimas 2-liikmeline : f = **A1** ∨ **A2**

	$x_1\ x_2\ x_3\ x_4$	**MDNK liikmed** (*elementaarkonjunktsioonid*)
A1	**— 0 — 0**	$\bar{x}_2\,\bar{x}_4$
A2	**0 — 1 —**	$\bar{x}_1\,x_3$

MDNK : $f = \bar{x}_2\,\bar{x}_4 \lor \bar{x}_1\,x_3$

oleme saanud **McCluskey' meetodiga** sama tulemuse, mille varem saime samale funktsioonile **Karnaugh' kaardiga** :




kogu *määramatuspiirkond* oli *McCluskey*' meetodi alguses võetud **1**de piirkonna koosseisu:

$$\sum(\mathbf{0, 2, 6, 7, 8, 10},\ \mathbf{3^*, 14^*})_1$$

Kas see tähendab, et meetodi tulemusena saadud **MDNK** arvutab kogu *määramatuspiirkonnas* enda väärtuseks **1** ?


kuigi enne kleepimise algust lisasime kogu *määramatuspiirkonna* juurde **ühtede** piirkonnale, siis see **ei tähenda** et tulemuseks saadud MDNK arvutaks kõikjal määramatuspiirkonnas enda väärtuseks **1**

(. . . . kuna **katmistabelis** ei pea katma * - veerge)

MKNK leidmine:

$$f(x_1 \ldots x_4) = \sum(0, 2, 6, 7, 8, 10)_1 \prod(1, 4, 5, 9, 11, 12, 13, 15)_0 \ (3, 14)_{-}$$

Kõik samad eelnevad toimingud tehakse (MDNK leidmise suhtes) **duaalselt vastupidi** :

Lisada *määramatuspiirkond* juurde **0**-de piirkonnale, saame (määramatuspiirkonnaga) *laiendatud 0de piirkonna*.

Sellise laiendatud 0-de piirkonna $\prod(\mathbf{1, 4, 5, 9, 11, 12, 13, 15},\ \mathbf{3^*, 14^*})_0$ *argumentvektorid* (2ndvektorid) jaotame lahtritesse vastavalt nende *indeksile* (ehk alustame **kleepimistabelit**)

1. jaotame vajaliku piirkonna (nüüd: laiendatud **0**-de piirkonna) **kleepimistabeli** esimesse veergu lahtritesse vastavalt *indeksitelele* :

index	laiend. **0**de pk.	K**?**	**2**-sed interv.	K**?**	**4**-sed interv.	K**?**
0						
1	**0 0 0 1**					
	0 1 0 0					
2	**0 0 1 1***					
	0 1 0 1					
	1 0 0 1					
	1 1 0 0					
3	**1 0 1 1**					
	1 1 0 1					
	1 1 1 0*					
4	**1 1 1 1**					

kleepimisreeglid on täpselt needsamad mis olid ka MDNK jaoks kleepimistabeli koostamisel.

esimese kleepimissammu **kleepimisreegel** :

teineteisega kokkukleepida saab naaberlahtrite **lähiskoode**.

2. teeme kõikvõimalikud *kleepimised* ehk **koostame kleepimistabeli**

. . . . tekitame kleepides kõikvõimalikud **2**-sed intervallid :

index	laiend. **0**de pk.	K**?**	**2**-sed interv.	K**?**	**4**-sed interv.	K**?**
0			**0 0 — 1**			
1	**0 0 0 1**	K	**0 — 0 1**			
	0 1 0 0	K	**— 0 0 1**			
2	**0 0 1 1***	K	**0 1 0 —**			
	0 1 0 1	K	**— 1 0 0**			
	1 0 0 1	K	**— 0 1 1**			
	1 1 0 0	K	**— 1 0 1**			
3	**1 0 1 1**	K	**1 0 — 1**			
	1 1 0 1	K	**1 — 0 1**			
	1 1 1 0*	K	**1 1 0 —**			
4	**1 1 1 1**	K	**1 1 — 0**			
			1 — 1 1			

			1 1 — 1			
			1 1 1 —			

. . . . edasi tekitame kleepides kõikvõimalikud **4**-sed intervallid :

(korduvad samasugused intervallid on kleepimistabelist väljajäetud)

teise ja järgnevate kleepimissammude **kleepimisreegel** :

kleepida saab ainult selliseid naaberlahtrite intervalle, millel on omavaheline erinevus täpselt **ühesainsas** **<u>olulises järgus</u>**

ehk kleebitavate intervallide vektoresituste paar peab olema kujul :

. . . . **0** . . . . või . . . . **1** . . . .
. . . . **1** . . . . **0** . . . .

mitte :

. . . . **0** . . . . **—** . . . . **1** . . . . **—** . . . .
. . . . **—** . . . . **0** . . . . **—** . . . . **1** . . . .

eelnevad neli vektoresituste punast paari **ei ole** kleebitavad **!**

index	laiend. **0**de pk.	K?	**2**-sed interv.	K?	**4**-sed interv.	K?
0			**0 0 — 1**	K	**— 0 — 1**	
1	**0 0 0 1**	K	**0 — 0 1**	K	**— — 0 1**	
	0 1 0 0	K	**— 0 0 1**	K	**— 1 0 —**	
2	**0 0 1 1***	K	**0 1 0 —**	K	**1 — — 1**	
	0 1 0 1	K	**— 1 0 0**	K	**1 1 — —**	
	1 0 0 1	K	**— 0 1 1**	K		
	1 1 0 0	K	**— 1 0 1**	K		
3	**1 0 1 1**	K	**1 0 — 1**	K		
	1 1 0 1	K	**1 — 0 1**	K		
	1 1 1 0*	K	**1 1 0 —**	K		
4	**1 1 1 1**	K	**1 1 — 0**	K		
			1 — 1 1	K		
			1 1 — 1	K		
			1 1 1 —	K		

. . . . suuremaid ehk 8-st vektorist koosnevaid intervalle edasi kleepida ei õnnestu — kleepimistabel on valmis

NB! juhtumisi on see "halb näitefunktsioon" :

ka **0**-de intervallide kleepimisel õnnestus siin igal sammul kasutada **kõiki** (esimeste veergude) intervalle (nagu oli enne ka **1**-de intervallide kleepimistabelis.

Enamike juhuslike loogikafunktsioonide korral **ei õnnestu** kasutada kleepimisel <u>kõiki</u> tabeliridu ehk **iga rida** tavaliselt **ei saa** märgendit **K**

3. märgime **suurimad 0**-de **intervallid**

(ehk kõik intervallid, mis **ei osalenud** kleepimisel ehk kus puudub **K**)

index	laiend. **0**de pk.	K?	**2**-sed interv.	K?	**4**-sed interv.	K?
0			**0 0 — 1**	K	**— 0 — 1**	**A1**
1	**0 0 0 1**	K	**0 — 0 1**	K	**— — 0 1**	**A2**
	0 1 0 0	K	**— 0 0 1**	K	**— 1 0 —**	**A3**
2	**0 0 1 1***	K	**0 1 0 —**	K	**1 — — 1**	**A4**
	0 1 0 1	K	**— 1 0 0**	K	**1 1 — —**	**A5**
	1 0 0 1	K	**— 0 1 1**	K		
	1 1 0 0	K	**— 1 0 1**	K		
3	**1 0 1 1**	K	**1 0 — 1**	K		
	1 1 0 1	K	**1 — 0 1**	K		
	1 1 1 0*	K	**1 1 0 —**	K		
4	**1 1 1 1**	K	**1 1 — 0**	K		
			1 — 1 1	K		
			1 1 — 1	K		
			1 1 1 —	K		

KATMISTABEL (minimaalse katte valimiseks)

valime katmistabelis **minimaalse arvu ridu**, mis koos kataksid märgenditega (siin: **0**-dega) kõik **ilma tärnita** veerud :

0de intervall \ laiend. **0**de pk.	**1**	**3***	**4**	**5**	**9**	**11**	**12**	**13**	**14***	**15**

	1	3*	4	5	9	11	12	13	14*	15
A1	0	0			0	0				
A2	0			0	0			0		
A3			0	0			0	0		
A4					0	0		0		0
A5							0	0	0	0

tärnita veergude ärakatmiseks on siin katmistabelis vajalik valida igaljuhul **3 rida**, kusjuures leidub 3 erinevat sobivat ridadekomplekti:

esimene võimalik MKNK kasutab ridu : f = (**A2**) (**A3**) (**A4**)

teine võimalik MKNK kasutab ridu : f = (**A1**) (**A3**) (**A4**)

kolmas võimalik MKNK kasutab ridu : f = (**A1**) (**A3**) (**A5**)

ridadevalik (**A2**) (**A3**) (**A5**) ei sobi ! (kuna jätavad katmata veeru **11**)

esimene võimalik sobiv ridadevalik:

0de intervall \ laiend. **0**de pk.	**1**	**3***	**4**	**5**	**9**	**11**	**12**	**13**	**14***	**15**	
A1	0	0			0	0					
A2	0			0	0			0			← valitud
A3			0	0			0	0			← valitud
A4					0	0		0		0	← valitud
A5							0	0	0	0	

teine võimalik sobiv ridadevalik:

0de intervall \ laiend. **0**de pk.	**1**	**3***	**4**	**5**	**9**	**11**	**12**	**13**	**14***	**15**	
A1	0	0			0	0					← valitud
A2	0			0	0			0			
A3			0	0			0	0			← valitud
A4					0	0		0		0	← valitud
A5							0	0	0	0	

kolmas võimalik sobiv ridadevalik:

0de intervall \ laiend. **0**de pk.	**1**	**3***	**4**	**5**	**9**	**11**	**12**	**13**	**14***	**15**	
A1	0	0			0	0					← valitud
A2	0			0	0			0			
A3			0	0			0	0			← valitud
A4					0	0		0		0	
A5							0	0	0	0	← valitud

4. kirjutame välja **MKNK** ühele ridadevalikule (näiteks esimesele :)

f = (**A2**) (**A3**) (**A4**)

$x_1\ x_2\ x_3\ x_4$ ← vektoresituse järkudele vastavad **muutujad**

MKNK liikmed (*elementaardisjunktsioonid*)

A2	— — 0 1	$(x_3 \vee \bar{x}_4)$
A3	— 1 0 —	$(\bar{x}_2 \vee x_3)$
A4	1 — — 1	$(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_4)$

MKNK : $f = (x_3 \vee \bar{x}_4)(\bar{x}_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_4)$

l a h e n d a t u d :

MDNK ja **MKNK** leitud *McCluskey*' meetodi **intervallmodifikatsiooniga** mõlemad minimaalsed normaalkujud tulid samad nagu eelnevalt saime **Karnaugh' kaardiga** sama funktsiooni minimeerides.

pane tähele :

3 erinevat **MKNK**-avaldist (mis on lahenditeks valitavad **McCluskey' meetodis**) on needsamad 3 lahendit, millele viitab ka **Karnaugh' kaart** — vaatasime neid eelmine tund **MKNK** leidmisel :

1	0	—	1
0	0	1	1
0	0	0	—
1	0	0	1

1	0	—	1
0	0	1	1
0	0	0	—
1	0	0	1

1	0	—	1
0	0	1	1
0	0	0	—
1	0	0	1

näide: *meetodi* **10nd**modifikatsioon *sama funktsiooni jaoks:*

VÕRDLUS : **McCluskey' minimeerimismeetod** vs **Karnaugh' kaart**

Loogikaavaldiste mõistes — iga samm McCluskey' meetodis rakendab ühe korra / ühe sammu *kleepimisseadust* :

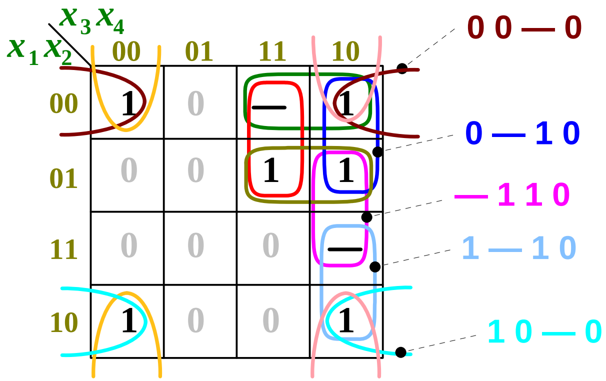
$$x\,y \;\vee\; x\,\bar{y} \;=\; x \qquad \text{või} \qquad (x \vee y)(x \vee \bar{y}) \;=\; x$$

. . . ehk : iga üksik *kleepimine* elimineerib välja ühe *algtermi*.

esimese *kleepimissammu* järel :

index	1de pk	K ?	2-ne intervall	K ?	4-ne intervall	K ?
0	0 0 0 0	K	0 0 — 0			
1	0 0 1 0	K	— 0 0 0			
	1 0 0 0	K				
2	0 0 1 1*	K	0 0 1 —			
	0 1 1 0	K	0 — 1 0			
	1 0 1 0	K	— 0 1 0			
			1 0 — 0			
3	0 1 1 1	K				
	1 1 1 0*	K	0 — 1 1			
4			0 1 1 —			
			— 1 1 0			
			1 — 1 0			

. . . iga *2-ne intervall* *kleepimistabelis* vastab mingile *<u>2-ruudulisele kontuurile</u>* Karnaugh' kaardil — viidatud erinevate v ä r v i d e g a :

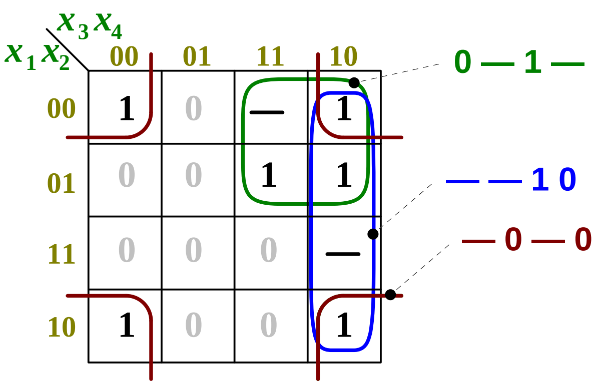


. . . siin kaardil on näidatud k õ i k **2-*ruudulised kontuurid*** ; *Kleepimistabelis* on samuti moodustunud k õ i k võimalikud *2-vektoriga intervallid* .

teise *kleepimissammu* järel :

.	.	K ?	2-intervallid	K ?	4-intervallid	K ?
0	0 0 0 0	K	0 0 — 0	K	— 0 — 0	
1	0 0 1 0	K	— 0 0 0	K		
	1 0 0 0	K			0 — 1 —	
					— — 1 0	
2	0 0 1 1*	K	0 0 1 —	K		
	0 1 1 0	K	0 — 1 0	K		
	1 0 1 0	K	— 0 1 0	K		
			1 0 — 0	K		
3	0 1 1 1	K				
	1 1 1 0*	K	0 — 1 1	K		
4			0 1 1 —	K		
			— 1 1 0	K		
			1 — 1 0	K		

. . . iga *4-ne intervall* *kleepimistabelis* vastab mingile *<u>4-ruudulisele kontuurile</u>* Karnaugh' kaardil — viidatud erinevate v ä r v i d e g a :



. . . siin kaardil on näidatud k õ i k **4**-*ruudulised kontuurid* ;
Kleepimistabelis on samuti moodustunud k õ i k võimalikud
4-vektoriga intervallid .