Loogikaalgebra (Boole'i algebra)

George **Boole** (1815 — 1864)

Sündinud Inglismaal Lincolnis. 16-aastasena tegutses kooliõpetaja assistendina. Õppis 5 aastat iseseisvalt omal käel matemaatikat, keskendudes hiljem algebrale. 1835 avas oma kooli.
Uudse lähenemisega loogikale korrastas selle kaasaegseks *loogikaalgebraks*.

Loogikaalgebra $(\{0,1\};\ \overline{},\ \wedge,\vee)$ koosneb loogikaväärtuste hulgast $\{0,1\}$, millel on defineeritud 3 *elementaarset loogikatehet*: unaarne tehe **inversioon** ja binaarsed tehted **konjunktsioon** ja **disjunktsioon**.

Kõik 3 elementaarset loogikatehet on juba eelpool lausearvutuse juures defineeritud ja loogikaalgebras kehtivad nad täpselt samal kujul.

Muutuja x või x_i on **loogikamuutuja**, kui ta saab omandada väärtusi ainult hulgast $\{0\ 1\}$. $x_i \in \{x_1\ \ x_2 \ldots . x_n\}$

Numbrimärkidena **0** ja **1** esitatud loogikaväärtusi nimetatakse ka "*konstant 0*" ja "*konstant 1*", et rõhutada nende erinevust *muutujatest* x_i.

Loogikaavaldis on *loogikamuutujaid* x_i, *konstante* **0 1** ja *tehtemärke* sisaldav kooslus, mis tema muutujate x_i väärtustamisel omandab (loogikatehete teostamise järel) samuti loogikaväärtuse **0** või **1**.

Loogikaavaldis sarnaneb lausearvutuses kasutatavale *lausearvutusvalemile* ning ta defineeritakse analoogiliselt:

definitsioon:

- **loogikamuutuja** x_i **ja konstandid 0 1 on loogikaavaldised;**
- **kui A on loogikaavaldis, siis on avaldised ka** $\overline{A}$ **ja** (A)
- **kui A ja B on loogikaavaldised, siis on avaldised ka**
  $A \wedge B$ $\quad A \vee B$ $\quad A \rightarrow B$ $\quad A \leftrightarrow B$ $\quad A \oplus B$
- *tehtemärgi puudumine operandide vahel on samaväärne tehtega* $\wedge$ *ehk konjunktsiooniga :* $AB \equiv A \wedge B \equiv A \cdot B$

Eelnev definitsioon välistab loogikaavaldiste hulgast ebakorrektsed operandide ja tehtemärkide kooslused: $A \wedge \vee B$ $\quad AB \leftrightarrow$ $\quad A(\rightarrow)B$

konstantide korrutamisel (*konjunktsioon*) on siiski vaja ka tehtemärk äranäidata :

kirjutis : **0 1** ei esita arusaadaval viisil *nulli* ja *ühe* **konjunktsiooni** ;

konstantide konjunktsioon sobib väljendada kujul : $0 \wedge 1$ või $0 \cdot 1$

Loogikaavaldis omandab / arvutab loogikaväärtuse 0 või **1**, kui tema loogikamuutujad väärtustada konkreetseteks väärtusteks (0 1) ja teostada avaldise loogikatehted.

Loogikatehete prioriteet

Kui sulgudega pole tehete järjekord avaldises määratud teisiti, siis määrab tehete teostusjärjekorra **loogikatehete prioriteedijärjestus** :

$$\overline{} \qquad \wedge \qquad \vee \qquad \rightarrow \qquad \leftrightarrow$$

üksiku loogikamuutuja **inversioon** teostatakse avaldistes kõikjal esimesena. Nagu aritmeetikas, nii on ka loogikas korrutamine (*konjunktsioon*) prioriteetsem kui liitmine (*disjunktsioon*).

?. . . kas **inversioon** on ikka võimalik a l a t i teostada esimesena?

milline on tehete järjekord avaldises $\overline{A} \vee \overline{B}$ **?** aga avaldises $\overline{A \vee B}$ **?**

Loogikaavaldiste võrdsus

Kaks erinevat loogikaavaldist on võrdväärsed ehk **loogiliselt võrdsed**, kui nad mõlemad omandavad muutujate (kõikvõimalike) samade väärtuskombinatsioonide korral sama loogikaväärtuse **0** või **1**.

teiste sõnadega: loogikaavaldised / loogikafunktsioonid on teineteisega **loogiliselt võrdsed**, kui nende **tõeväärtustabelid on täpselt samasugused**

näide: $x_1\overline{x}_2 \vee x_2 = x_1 \vee \overline{x}_1 x_2$

Asendades siin muutujate x_1 ja x_2 asemele mingid loogikaväärtused, väärtustuvad võrduse mõlema poole avaldised alati ühtemoodi **0**-ks või ühtemoodi **1**-ks :

ülesanne:

Kontrollida eelpoolsete avaldiste $x_1\bar{x}_2 \vee x_2$ ja $x_1 \vee \bar{x}_1 x_2$ **loogilist võrdsust** nende tõeväärtustabelite võrdlemise teel :

$x_1 x_2$	$x_1\bar{x}_2 \vee x_2$	$x_1 \vee \bar{x}_1 x_2$
0 0		
0 1		
1 0		
1 1		

iseseisev vabatahtlik kodune lahendamine:

- arvuta loogikaavaldisele $x_1 \vee \bar{x}_1 x_2$ tema tõeväärtustabel ja tuvasta, kas see juhtub olema samasugune nagu oli avaldise $x_1\bar{x}_2 \vee x_2$ tunnis leitud tõeväärtustabel :

$x_1 x_2$	$x_1\bar{x}_2 \vee x_2$	$x_1 \vee \bar{x}_1 x_2$
0 0	0	?
0 1	1	?
1 0	1	?
1 1	1	?

Loogikaavaldised **2-muutuja loogikafunktsioonid** $f(x_1 x_2)$

olulisi mõisteid :

Loogikafunktsioon seab oma *määramispiirkonna* igale **2nd**vektorile (ehk *ühtede* ja *nullide* "komplektile") vastavaks loogikaväärtuse **0** või **1**.

näiteks: $f(0\,1\,1) = 0$ või teine võimalus : $f(011) = 1$

Kui **2nd**vektor on loogikafunktsiooni argumendiks, siis sellist **2nd**vektorit nimetame ka **argumentvektoriks**.

1de piirkonna moodustavad need argumentvektorid, mille korral funktsioon väärtustub **1**-ks.

0de piirkonna moodustavad need argumentvektorid, mille korral funktsioon väärtustub **0**-ks.

näitena eelmine avaldis ja tema tõeväärtustabel :

vaadeldes avaldist $x_1\bar{x}_2 \vee x_2$ 2-muutuja loogikafunktsioonina :

$$f(x_1 x_2) = x_1\bar{x}_2 \vee x_2$$

$x_1 x_2$	$x_1\bar{x}_2 \vee x_2$
0 0	0
0 1	1
1 0	1
1 1	1

. . . siis selle funktsiooni

nullide piirkonnaks on *argumentvektor* **00** üksi ;
ühtede piirkonnaks on siin *argumentvektorid* **01 10 11** ;

eelistatuim avaldisekuju: **Disjunktiivne Normaalkuju (DNK)**

1-de piirkonnast saab välja kirjutada loogikafunktsioonile tema kõige eelistatuma avaldisekuju: **disjunktiivse normaalkuju** (DNK)

algtermiks nimetatakse loogikaavaldise igat *üksikut loogikamuutujat* või selle *inversiooni* : x_i $\bar{x}_i$

(. . . . ehk loogikamuutuja iga üksik "eksemplar" avaldises)

näide:

TTÜ Arvutisüsteemide Instituut

eelvaadatud avaldises $x_1 \vee \bar{x}_1 x_2$ on 2 loogikamuutujat : x_1 x_2
kuid **3** *algtermi* ;

avaldises $(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1)\, x_2 \vee \bar{x}_2$ sisaldub samuti 2
loogikamuutujat kuid **4** *algtermi*

elementaarkonjunktsioon on *algtermide konjunktsioon*

näide:

järgneval real on **5** erinevat *elementaarkonjunktsiooni* :

$x_3 x_4$ $\quad \bar{x}_1 x_2 x_4$ $\quad x_2$ $\quad \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 x_4$ $\quad \bar{x}_1 \bar{x}_3 \bar{x}_5$

disjunktiivne normaalkuju (**DNK**) on
elementaarkonjunktsioonide disjunktsioon

näiteks:

$$x_3 x_4 \quad \vee \quad \bar{x}_1 x_2 x_4 \quad \vee \quad x_2$$

Üksikut *elementaarkonjunktsiooni* DNK koosseisus nimetame ka DNK **liikmeks**.

Eelnevas DNK-s $x_3 x_4 \vee \bar{x}_1 x_2 x_4 \vee x_2$ on :
3 *liiget* ;
4 *muutujat :* x_1 x_2 x_3 x_4
6 *algtermi*.

Disjunktiivne Normaalkuju (DNK) tuleneb loogikafunktsiooni **ühtede piirkonnast**.

ülesanne:

Esitada igale järgnevale tõeväärtustabelile f_e f_t f_k f_n f_v
1 . . . . 3 erinevat sobivat <u>kuni 4 algtermiga</u> **loogikaavaldist**:
eristame funktsioone üksteisest suvaliste indeksitega :

$x_1 x_2$	f_e	f_t	f_k	f_n	f_v
0 0	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**
0 1	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**
1 0	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**
1 1	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**

. . . koostatavates avaldistes võib kasutada kõiki tuttavaid loogikatehteid :

$$\overline{} \qquad \wedge \qquad \vee \qquad \rightarrow \qquad \leftrightarrow$$

$x_1 x_2$	f_e	f_t	f_k	f_n	f_v
0 0	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**
0 1	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**
1 0	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**
1 1	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**
	vastus: $\overline{x_1 \rightarrow x_2}$ $x_1 \bar{x}_2$	*vastus:* $x_1 \leftrightarrow x_2$ $\bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee x_1 x_2$ $\overline{\bar{x}_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_2}$	*vastus:* $x_2 \rightarrow x_1$ $\bar{x}_1 \rightarrow \bar{x}_2$ $\overline{\bar{x}_1 x_2}$	*vastus:* $\bar{x}_2$ $\bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee x_1 \bar{x}_2$	*vastus:* **1**

iseseisev vabatahtlik kodune lahendamine :

rohelise õpiku **lk. 26** kaks ülesannet :

TÜ Arvutisüsteemide Instituut

- Kontrollida, kas A ja B kõikvõimalike väärtuskombinatsioonide korral kehtib võrdus

$$[\,(A \to B) \;\wedge\; (B \to A)\,] \;=\; A \leftrightarrow B$$

selleks arvuta võrduse *vasaku* poole avaldise jaoks tema 4-realine tõeväärtustabel ja võrdle seda võrduse *parema* poole avaldise (ehk **ekvivalentsi**) tõeväärtustabeliga

- Kontrollida, kas A B C kõikvõimalike väärtuskombinatsioonide korral kehtib võrdus

$$[\,(A \to B) \;\wedge\; (B \to C)\,] \;=\; A \to C$$

selleks arvuta võrduse mõlema poole avaldise jaoks tema 8-realine tõeväärtustabel ja võrdle neid

ülesanne:

Arvutada **tõeväärtustabel** 3-muutuja loogikafunktsioonile:

$$f(x_1\, x_2\, x_3) \;=\; (x_3 \to x_1)\,\bar{x}_2 \;\vee\; (\bar{x}_1 \leftrightarrow x_2)$$

$$f(x_1\, x_2\, x_3) \;=\; (x_3 \to x_1)\,\bar{x}_2 \;\vee\; (\bar{x}_1 \leftrightarrow x_2)$$

$x_1\, x_2\, x_3$	$f(x_1\, x_2\, x_3)$
0 0 0	**1**
0 0 1	**0**
0 1 0	**1**
0 1 1	**1**
1 0 0	**1**
1 0 1	**1**
1 1 0	**0**
1 1 1	**0**

iseseisev vabatahtlik kodune lahendamine :

$$f(x_1\, x_2\, x_3) \;=\; (x_3 \to x_1)\,\bar{x}_2 \;\vee\; (\bar{x}_1 \leftrightarrow x_2)$$

eelmise loogikaavaldise 8-realisest tõeväärtustabelist arvutasime välja tunnis ainult tema 3 rida. Leia / arvuta tema tõeväärtustabeli ülejäänud **5 rida** :

$x_1\, x_2\, x_3$	$f(x_1\, x_2\, x_3)$
0 0 0	1
0 0 1	0
0 1 0	**?**
0 1 1	**?**
1 0 0	**?**
1 0 1	**?**
1 1 0	0
1 1 1	**?**

Algebraline avaldis (Algebraline loogikaavaldis)

Algebraline on selline loogikaavaldis, mis sisaldab ainult *elementaarseid* loogikatehteid : $\overline{}$ $\wedge$ $\vee$

Algebraline avaldis **ei** sisalda tehteid $\to$ ega $\leftrightarrow$

Algebraliste avaldiste d u a a l s u s

Algebraline loogikaavaldis omandab oma *duaalse* kuju, kui

- avaldise kõik *konjunktsioonid* asendada *disjunktsiooniga*
- avaldise kõik *disjunktsioonid* asendada *konjunktsiooniga*
- avaldise kõik *konstandid* **0** asendada *konstandiga* **1**
- avaldise kõik *konstandid* **1** asendada *konstandiga* **0**

(**inversioone** ei asendata duaalsele kujule üleminnes)

Duaalsele kujule üleminnes **tehete järjekord avaldises ei tohi muutuda** (ehk *duaalses* avaldises tuleb rakendada **s u l u d**)

näide:

avaldise $x_1\,\bar{x}_2 \;\vee\; x_3$ jaoks tema *duaalne* avaldis on :

$$(x_1 \vee \bar{x}_2)\; x_3$$

TTÜ Arvutisüsteemide Instituut

näide:

võrduse $x_1 \bar{x}_2 \vee x_3 = 0$ jaoks tema *duaalne* võrdus on :

$$(x_1 \vee \bar{x}_2)\, x_3 = 1$$

Kui duaalse avaldise jaoks leida v e e l k o r d duaalne avaldis, siis saadakse esialgne avaldis tagasi.

Seega *duaalsed* avaldised ja võrdused on v a s t a s t i k k u duaalsed :

"*duaalsete avaldiste paar*" "*duaalsete võrduste paar*"

duaalsusprintsiip

Algebraliste avaldiste kohta kehtib ***duaalsusprintsiip*** :

Kui 2 avaldist on v õ r d s e d , siis on ka nende duaalsed avaldised omavahel v õ r d s e d :

$$A = B$$ erinevad kuid VÕRDSED avaldised

$$A_d \quad B_d$$ mõlemale leitud tema DUAALNE kuju...

$$A_d = B_d$$ ....ka duaalsed avaldisekujud on teineteisega VÕRDSED

Loogikaalgebra põhiseosed

Duaalsusprintsiibist tulenevalt kehtivad kõik **loogikaalgebra põhiseosed** *duaalsete* paaridena.

Loogikaalgebra põhiseosed esituvad kuni 3 loogikamuutuja abil, mida tähistame siin x y z . *Neid muutujatähiseid on põhiseoste esitamisel kasutatud indeksite vältimiseks ehk nad on* $x_1 x_2 x_3$ *asemel*

Igaüks nendest on tegelikult loogikaväärtus **0** või **1** : $x, y, z \in \{0\ 1\}$

Järgnevad võrdused (põhiseosed) kehtivad olenemata sellest, kumba loogikaväärtuse (**0** või **1**) me nendes iga loogikamuutuja x y z asemele asendame.

Põhiseoste kehtivus tuleneb elementaarsete loogikatehete definitsioonidest :

	konjunktsioon	disjunktsioon
$x\ y$	$x \wedge y$	$x \vee y$
0 0	**0**	**0**
0 1	**0**	**1**
1 0	**0**	**1**
1 1	**1**	**1**

L O O G I K A A L G E B R A P Õ H I S E O S E D

Meenutame, et *loogikaalgebras* sisalduvad ainult tehted $\overline{}$ $\wedge$ $\vee$ ehk p õ h i s e o s e i d esitavad ainult *algebralised avaldised.*

kommutatiivsus :

verbaalselt :

" **tehte** tulemus ei olene **operandide** järjekorrast "

$$x \vee y = y \vee x \qquad x \wedge y = y \wedge x$$

korrutamise ja *liitmise* k o m m u t a t i i v s u s nähtub nende tehete tõeväärtustabelite <u>k e s k m i s t e s t ridadest</u> — kus on mõlemal real tehtetulemusena s a m a loogikaväärtus :

	konjunktsioon	disjunktsioon
$x\ y$	$x \wedge y$	$x \vee y$
0 0	0	0
0 1	**0**	**1**
1 0	**0**	**1**
1 1	1	1

TÜ Arvutiteaduse Instituut

eituse eitamise seadus : $\overline{\overline{x}} = x$

(topelteituse seadus)

! *tüüpiline viga :*

selles avaldises **ei ole** *topeltinversiooni* :

$$\overline{x_1\,\overline{x}_2}$$

seega

$$\overline{x}_1\,x_2 \neq \overline{x_1\,\overline{x}_2}$$

. . . kuidas teame, et nad **ei ole** võrdsed ?

juhul kui nad **on** võrdsed, siis peavad mõlemad avaldised väärtustuma samade muutujaväärtuste korral alati samamoodi : **0** ja **0** / **1** ja **1**

$x_1\,x_2$	$\overline{x_1\,\overline{x}_2}$	$\overline{x}_1\,x_2$
0 0		
0 1		
1 0		
1 1		

$x_1\,x_2$	$\overline{x_1\,\overline{x}_2}$	$\overline{x}_1\,x_2$
0 0	**1**	**0**
0 1	. . . pole enam oluline arvutada . .	. . . pole enam oluline arvutada . .
1 0	. . . pole enam oluline arvutada . .	. . . pole enam oluline arvutada . .
1 1	. . . pole enam oluline arvutada . .	. . . pole enam oluline arvutada . .

seosed konstantidega 0 ja 1 :

$\overline{0} = 1$ $\quad$ $\overline{1} = 0$ $\quad$ $0 \cdot 1 = 0$ $\quad$ $0 \vee 1 = 1$

$x \cdot 0 = 0$ $\quad$ $x \cdot 1 = x$ $\quad$ $x \cdot \overline{x} = 0$

$x \vee 0 = x$ $\quad$ $x \vee 1 = 1$ $\quad$ $x \vee \overline{x} = 1$

eelnevates põhiseostes on näha *duaalsed paarid*

samad eelnevad võrdused, kus iga *duaalne paar* on rõhutatud erinevate värvidega :

$\overline{0} = 1$ $\quad$ $\overline{1} = 0$ $\quad$ $0 \cdot 1 = 0$ $\quad$ $1 \vee 0 = 1$

$x \cdot 0 = 0$ $\quad$ $x \cdot 1 = x$ $\quad$ $x \cdot \overline{x} = 0$

$x \vee 0 = x$ $\quad$ $x \vee 1 = 1$ $\quad$ $x \vee \overline{x} = 1$

idempotentsus : $x \cdot x = x$ $\quad$ $x \vee x = x$

. . . *idempotentsus* nähtub *konjunktsiooni* ja *disjunktsiooni* tõeväärtustabelite e s i m e s e s t ja v i i m a s e s t reast :

TTÜ Arvutisüsteemide Instituut

	konjunktsioon	disjunktsioon
$x\ y$	$x \wedge y$	$x \vee y$
0 0	0	0
0 1	0	1
1 0	0	1
1 1	1	1

?. . . kuid kas pole **korrutamise** korral : $x \cdot x = x^2$ ehk " x *ruudus* " ? Miks ei ole ?

! *viga :*

$x \cdot x = x^2$ $x \cdot x \cdot x = x^3$ jne on õige ainult a r i t m e e t i l i s e korrutamise korral (**arvude** korrutamisel) ;
meie korrutamine on l o o g i l i n e korrutamine *ehk konjunktsioon*, kus korrutatakse *loogikaväärtusi* 0 / 1 mitte *arve*.
Loogikaväärtuste jaoks pole olemas "**astendamist**", misjuhul ei saa olla ka astmeid ehk " x *ruudus*", " x *kuubis*" . . . . ning *loogikamuutuja* x jaoks ei ole olemas ka mitte mingit "ülaindeksiga" tähistust : x^2

DeMorgani seadused : (kahe muutuja jaoks)

$$\overline{x \vee y} = \bar{x}\,\bar{y} \qquad \overline{x\,y} = \bar{x} \vee \bar{y}$$

DeMorgani seaduste modifikatsioon 3 muutuja jaoks:

$$\overline{x \vee y \vee z} = \bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z} \qquad \overline{x\,y\,z} = \bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}$$

. . . kehtib suvalise arvu muutujate jaoks . . .

neeldumine :

$$x \vee x\,y = x$$ ("lihtsam" neeldumisseadus)

sama neeldumise erijuhtumid on ka :

$$x \vee x\,\bar{y} = x$$
$$\bar{x} \vee \bar{x}\,y = \bar{x}$$
$$\bar{x} \vee \bar{x}\,\bar{y} = \bar{x}$$

neeldumine : ("keerulisem" neeldumisseadus)

$$x \vee \bar{x}\,y = x \vee y$$

. . . . *meenutame eelmisel tunnil vaadatud teineteisega võrdseid avaldisi :*

$x_1 x_2$	$x_1 \bar{x}_2 \vee x_2$	$x_1 \vee \bar{x}_1 x_2$
0 0	**0**	**0**
0 1	**1**	**1**
1 0	**1**	**1**
1 1	**1**	**1**

sama neeldumise $x \vee \bar{x}\,y = x \vee y$ **erijuhtumid** on ka :

$$\bar{x} \vee x\,y = \bar{x} \vee y$$
$$\bar{x} \vee x\,\bar{y} = \bar{x} \vee \bar{y}$$
$$x \vee \bar{x}\,\bar{y} = x \vee \bar{y}$$

distributiivsus : (sulgude nn. "lahtikorrutamine" ja "lahtiliitmine")

$$x(y \vee z) = x\,y \vee x\,z \qquad x \vee (y\,z) = (x \vee y)(x \vee z)$$

TTÜ Arvutisüsteemide Instituut

. . . võrduse mõlema poole avaldise t õ e v ä ä r t u s t a b e l osutub samaks :

$x\,y\,z$	$x\,(y \vee z)$	$x\,y \vee x\,z$
0 0 0	0	0
0 0 1	0	0
0 1 0	0	0
0 1 1	0	0
1 0 0	0	0
1 0 1	1	1
1 1 0	1	1
1 1 1	1	1

`kleepimine :` (ebaolulise muutuja / avaldiseliikme lisamine)

$x = x\,y \vee x\,\bar{y}$ $\qquad$ $x = (x \vee y)(x \vee \bar{y})$

Neeldumisseaduste olemus

Lisame veel ühe märkuse *neeldumisseadusele* $x \vee \bar{x}\,y = x \vee y$
Selle reegli verbaalseks esituseks sobiks:

"*disjunktsiooni ühele poolele võib juurde korrutada teise poole inversiooni* *(avaldise väärtust sellega muutmata)*".

Seega kehtivad võrdused:
$x \vee y = x \vee y\,\bar{x}$ ning samuti $x \vee y = x\,\bar{y} \vee y$
ehk
$x \vee \bar{x}\,y = x \vee y = x\,\bar{y} \vee y$

Neeldumise $x \vee x\,y = x$ kehtivust kinnitab ka teisendus, kus ühine tegur x tuuakse võrduse vasakus pooles sulgude ette,
misjuhul sulgudesse jääb konstant **1** : $x \vee x\,y = \ldots.$

$x \vee x\,y = x\,(1 \vee y) = x\,(1) = x$

pane tähele: $x \vee x\,y = x\,(1 \vee y)$ on korrektne teisendussamm, kuna sulgude lahtikorrutamisel $x\,(1 \vee y)$ tekkib taas avaldis $x \vee x\,y$

Neeldumisvõrduste $x \vee \bar{x}\,y = x \vee y$
ja $x\,\bar{y} \vee y = x \vee y$

kehtivus on tõestatav ka nende võrduste parema poole avaldise teisendamise teel vasaku poole avaldiseks.

Arvestades, et $x \vee \bar{x} = 1$ saame *distributiivsusseaduse* (sulgude lahtikorrutamise) abil ja *neeldumise* $x \vee x\,y = x$ abil teisendada:

$$
\begin{aligned}
x \vee y &= (x \vee y)\cdot 1 = (x \vee y)\cdot(x \vee \bar{x}) = \\
&= x\,x \vee y\,x \vee x\,\bar{x} \vee y\,\bar{x} = \\
&= x \vee x\,y \vee 0 \vee y\,\bar{x} = x \vee \bar{x}\,y
\end{aligned}
$$

Seega saime: $x \vee y = \ldots\ldots\ldots = x \vee \bar{x}\,y$

Rõhutame, et eelnevad tähised x y z esitavad mitte ainult üksikuid loogikamuutujaid, vaid x y z asemel võivad olla ka keeruka(ma)d loogikaavaldised, kuna ka avaldised arvutuvad / asenduvad loogikaväärtusteks **0** või **1** .

näide:

neeldumisseadusest $x \vee x\,y = x$ tuleneb, et neeldumine toimub ka näiteks avaldises $x_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1\bar{x}_2x_3x_4\bar{x}_5$:

$$x_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1\bar{x}_2x_3x_4\bar{x}_5 = (x_1\bar{x}_2x_3) \vee (x_1\bar{x}_2x_3)[x_4\bar{x}_5] = x_1\bar{x}_2x_3$$

eelnevad põhiseosed sisaldasid ainult *elementaarseid loogikatehteid*

TTÜ Arvutisüsteemide Instituut

$\overline{}$ $\wedge$ $\vee$

? . . . aga miks ei olnud põhiseoste hulgas **duaalseid** *neeldumisseadusi* ?
tõepoolest — *duaalsed neeldumisseadused* oleks :

$x \vee xy = x$ jaoks duaalne : $x(x \vee y) = x$

$x \vee \bar{x}y = x \vee y$ jaoks duaalne : $x(\bar{x} \vee y) = xy$

mõlema neeldumise *duaalsed* kujud osutuvad teisenduste jaoks mittevajalikeks, kuna **sulgude lahtikorrutamine** (võrduse vasaku poole avaldises) annab otsekohe sellesama tulemuse, mida *duaalse neeldumisseaduse* parema poole avaldis näitab.

Loogikatehete asendusseosed

Asendusseosed asendavad *mitteelementaarseid* loogikatehteid

implikatsioon: $\rightarrow$
ekvivalents: $\leftrightarrow$
summa mooduliga 2: $\oplus$ (ka *"välistav VÕI"* *XOR*)
(*see tehe on käsitletud edaspidi*)

...elementaarsete loogikatehete (*inversioon, disjunktsioon, konjunktsioon*) kaudu:

implikatsiooni asendusseos :

$x \rightarrow y = \bar{x} \vee y$ (*kontrollida tõeväärtustabelite võrdlemise teel* **!**)

/ *ülesanne:* \

Kontrolli **tõeväärtustabelite võrdlemise teel**, kas

$x_1 \rightarrow x_2 = \bar{x}_1 \vee x_2$?

TTÜ Arvutisüsteemide Instituut