LAUSEARVUTUS

Lausearvutus on loogilise mõtlemise matemaatiline mudel.

Lausearvutuslauseid tähistame formaalselt suurtähtedega: **A**, **B**, **P**, **Q** . . .

Lihtlausetest koostatakse kindlate sidesõnade ja loogiliste konstruktsioonide abil *liitlauseid*:

" kui palka ei tõsteta või tööaega ei vähendata, siis algab streik "
" ülemus on kohal siis ja a i n u l t siis, kui tema auto on maja ees"
" kui lähed suusatama, siis vajad suuski ja suusasaapaid ja suusakeppe"

Lausearvutuse lihtlauseid / osalauseid seotakse liitlauseteks **5** loogilise konstruktsiooni ehk **loogikatehte** abil.

4 sidumiskonstruktsiooni seovad igaüks kahte lauset (*binaarsed* loogikatehted) ja **1** tehe viiest on rakendatav üksikule lausele (*unaarne* loogikatehe)

verbaalne esitus on infoesitus lingvistilise keele abil (tekst või kõne)
formaalne esitus on infoesitus ilma lingvistilise keele abita
(valemid, võrrandid, sümbolid . . . .)

verbaalne esitus	formaalne tähistus
P eitus : " *mitte P* "; " *pole õige, et P* "	$\overline{\mathbf{P}}$
ühe alternatiivi kehtimise nõue : " *P või Q* "	$\mathbf{P} \vee \mathbf{Q}$
tingimuste samaaegse kehtimise nõue : " *P ja Q* "	$\mathbf{P} \wedge \mathbf{Q}$

samaväärsus (ekvivalents) : " *P (siis ja) ainult siis, kui Q* "	$\mathbf{P} \leftrightarrow \mathbf{Q}$
järeldumine : "*P kehtimisest järeldub Q kehtimine* " " *Kui P , siis Q* "	$\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q}$

arvutiga kirjutades saab tehtemärgid jm. märgid / sümbolid valida fondist nimega **Symbol** (puuduvad **Times New Roman** fondis)

JA-tehte märgina kasutatakse ka sümbolit '*ampersand*' : **&** (**&** ≡ ∧)

Ekvivalentsitehte märgina kasutatakse ka sümbolit **~** (**~** ≡ ↔)

VÕI-tehte märgina kasutatakse ka sümbolit + (+ ≡ ∨)

eitust tähistatakse erinevates allikates erinevalt : $\overline{\mathbf{A}} \equiv \neg\mathbf{A} \equiv \mathbf{A}'$

Aritmeetilise liitmise tehtemärki ' + ' sobib kasutada **VÕI**-tehte tehtemärgina sellepärast, et VÕI-tehe on *loogiline liitmine*, olles "tavalise" aritmeetilise liitmise analoog loogikas.

(Sümbol ' ≡ ' on siin ja edaspidi kasutusel tähenduses "*on samaväärne*")

Loogikatehted lausearvutuses

tehtemärk	tehte **nimi** ja selgitus
—	loogiline **eitus** ehk **inversioon**

$\wedge$	loogiline **korrutamine** ehk **konjunktsioon** ehk **JA**-tehe (aritmeetilise korrutamise analoog loogikas)
$\vee$	loogiline **liitmine** ehk **disjunktsioon** ehk **VÕI**-tehe (aritmeetilise liitmise analoog loogikas)
$\leftrightarrow$	loogiline **samaväärsus** ehk **ekvivalents** (võrdusmärgi ' = ' analoog loogikas)
$\rightarrow$	loogiline **järeldamine** ehk **implikatsioon** (ei oma aritmeetikas analoogi)

Edaspidi eelistame loogikatehete nimedena kasutada termineid
inversioon *disjunktsioon* *konjunktsioon* *ekvivalents* *implikatsioon*

Implikatsioonitehte operandide staatus: *eeldus* $\rightarrow$ *järeldus*

Ekvivalentsitehte mõlemad operandid on samaaegselt teineteise eelduseks ja järelduseks :

kui **P** $\leftrightarrow$ **Q** siis **P** $\rightarrow$ **Q** ja samal ajal ka **Q** $\rightarrow$ **P**

Loogikatehete definitsioonid

Eelnevalt vaatasime :
— mis on loogikatehete **nimed** ;
— mis on nende *verbaalne* **tähendus** igapäevases / lingvistilises keeles;
— milliste **tehtemärkidega** neid esitatakse avaldistes.
. . . . kuid eelnev ei kirjelda, kuidas need tehted a r v u t a v a d .

Loogikatehete definitsioonid määravad nende resultaadi operandiväärtuste kõikide kombinatsioonide korral

. . . ehk määravad nende "käitumise" (arvutamise) kõikvõimalikes olukordades . . .

Loogikatehete operandideks on *tõeväärtused* (**0** ja **1**) ja tulemuseks on samuti tõeväärtus.

Seega loogikatehted "*töötlevad tõeväärtusi uuteks tõeväärtusteks*".

Lausearvutuses kasutatakse **ühte** *unaarset* (ühe operandiga) ja **nelja** *binaarset* (kahe operandiga) tehet.

Binaarse loogikatehte kumbki operand saab omada ainult k a h t e teineteist välistavat tõeväärtust — misjuhul ilmneb, et kokku eksisteerib täpselt **4** võimalikku operandiväärtuste kombinatsiooni :

A B					
0 0					
0 1					
1 0					
1 1					

Osutub, et iga loogikatehte "käitumine" on täielikult kirjeldatav / defineeritav kompaktses (kõigest) 4-realises tabelis.

tõeväärtustabel

Tõeväärtustabelis on *tõeväärtuste* kõikvõimalikud kombinatsioonid loetletud kindlas järjekorras alates **000 . . . 0** kuni **111 . . . 1**

Eelnevalt loetlesime kõik **5** loogikatehet mida *lausearvutus* kasutab :

	inversioon	**konjunktsioon**	**disjunktsioon**	**ekvivalents**	**implikatsioon**
A B	$\overline{A}$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \leftrightarrow B$	$A \rightarrow B$
0 0					
0 1					
1 0					
1 1					

Loogikatehted genereerivad "uusi" tõeväärtusi (**0** \| **1**) oma operandidest — mis on samuti *tõeväärtused* (**0** \| **1**)

Loogikatehete **tulemused** nende kõikvõimalike operandide jaoks on :

	inversioon	konjunktsioon	disjunktsioon	ekvivalents	implikatsioon
A B	$\overline{A}$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \leftrightarrow B$	$A \rightarrow B$
0 0	1	**0**	**0**	**1**	**1**
0 1	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**
1 0	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**
1 1	0	**1**	**1**	**1**	**1**
alternatiivne nimi :	**eitus**	loogiline **korrutamine** **JA** - *tehe*	loogiline **liitmine** **VÕI** - *tehe*	**samaväärsus**	**järeldamine**

4 esimese loogikatehte käitumine / arvutamine on lihtne arusaada.

Unaarset tehet *inversioon* võib eelnevas tabelis esitada ükskõik kumba loogikamuutujat (A või B) kasutades; eelnevas tabelis defineeritakse ta juhtumisi **A** kaudu.

INVERSIOON on lihtsaim loogikatehe : ta pöörab oma operandi väärtuse v a s t u p i d i s e k s.
Konjunktsioon ja *Disjunktsioon* on lihtsaimad *binaarsed* loogikatehted.

KONJUNKTSIOON käitub / arvutab nagu *aritmeetiline korrutamine* (olles seega *loogiliseks korrutamiseks*) :

	inversioon	konjunktsioon	disjunktsioon	ekvivalents	implikatsioon
A B	$\overline{A}$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \leftrightarrow B$	$A \rightarrow B$
0 0	1	**0**	0	1	1
0 1	1	**0**	1	0	1
1 0	0	**0**	1	0	0
1 1	0	**1**	1	1	1
	eitus	loogiline **korrutamine** **JA** - *tehe*	loogiline **liitmine** **VÕI** - *tehe*	**samaväärsus**	**järeldamine**

tema *verbaalne* "arvutamispõhimõte" on sõnastatav kujul :

. . . üksainuski operandiväärtus **VALE** (0) sunnib kogu *konjunktsiooni* resultaadiks **VALE** (0) :

$$1 \wedge 1 \wedge 1 \wedge 1 \wedge 1 \wedge 1 \wedge 1 = 1 \qquad \text{kuid}$$
$$1 \wedge 1 \wedge 1 \wedge 1 \wedge 0 \wedge 1 \wedge 1 = 0$$

DISJUNKTSIOON käitub / arvutab nagu *aritmeetiline liitmine* (olles seega *loogiliseks liitmiseks*) :

	inversioon	konjunktsioon	disjunktsioon	ekvivalents	implikatsioon
A B	$\overline{A}$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \leftrightarrow B$	$A \rightarrow B$
0 0	1	0	**0**	1	1
0 1	1	0	**1**	0	1
1 0	0	0	**1**	0	0
1 1	0	1	**1**	1	1
	eitus	loogiline **korrutamine** **JA** - *tehe*	loogiline **liitmine** **VÕI** - *tehe*	**samaväärsus**	**järeldamine**

tema *verbaalne* "arvutamispõhimõte" on sõnastatav kujul :

. . üksainuski operandiväärtus **TÕENE** (1) sunnib kogu *disjunktsiooni* resultaadiks **TÕENE** (1) :

$$0 \vee 0 \vee 0 \vee 0 \vee 0 \vee 0 \vee 0 = 0 \qquad \text{kuid}$$
$$0 \vee 0 \vee 1 \vee 0 \vee 0 \vee 0 \vee 0 = 1$$

Tehted **inversioon** , **konjunktsioon** ja **disjunktsioon** on *elementaarsed* loogikatehted. Nad pole avaldatavad mingite teiste (veelgi) lihtsamate loogikatehete kaudu, kuna nad ise ongi "lihtsaimad" tehted.

Kõik muud loogikatehted (ka *implikatsioon* ja *ekvivalents*) on avaldatavad kolme elementaarse loogikatehte:
inversiooni, *konjunktsiooni* ja *disjunktsiooni* kaudu.

EKVIVALENTS *(samaväärsus)*

See tehe "tunneb ära" võrdsed operandid :

Kui m õ l e m a d operandid omavad s a m a loogikaväärtust, siis *ekvivalents* väärtustub **1**-ks (*TÕENE*) ;

Kui m õ l e m a d operandid omavad e r i n e v a t loogikaväärtust, siis *ekvivalents* väärtustub **0**-ks (*VALE*) .

	inversioon	konjunktsioon	disjunktsioon	ekvivalents	implikatsioon
A B	$\overline{A}$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \leftrightarrow B$	$A \rightarrow B$
0 0	1	0	0	**1**	1
0 1	1	0	1	**0**	1
1 0	0	0	1	**0**	0
1 1	0	1	1	**1**	1
	eitus	loogiline korrutamine JA - *tehe*	loogiline liitmine VÕI - *tehe*	samaväärsus	järeldamine

IMPLIKATSIOON *(järeldamine)*

Selle loogikatehte käitumine on "keerulisem".

	inversioon	konjunktsioon	disjunktsioon	ekvivalents	implikatsioon
A B	$\overline{A}$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \leftrightarrow B$	$A \rightarrow B$
0 0	1	0	0	1	**1**
0 1	1	0	1	0	**1**
1 0	0	0	1	0	**0**
1 1	0	1	1	1	**1**
	eitus	loogiline korrutamine JA - *tehe*	loogiline liitmine VÕI - *tehe*	samaväärsus	järeldamine

Juba nimetasime, et *implikatsiooni* operandid omavad erinevat staatust ja täpsustavaid nimetusi :

eeldus → *järeldus*

Näeme *implikatsiooni* definitsioonist, et see tehe on enamasti TÕENE.
VALE on ta ainult ühel juhul: kui *eeldus* on **tõene** kuid *järeldus* on **vale**:

$$\mathbf{1} \rightarrow \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

. . . ülejäänud 3 võimalikku operandide kombinatsiooni annavad TÕESE *implikatsiooni* :

$$\mathbf{0} \rightarrow \mathbf{0} = \mathbf{1}$$
$$\mathbf{0} \rightarrow \mathbf{1} = \mathbf{1}$$
$$\mathbf{1} \rightarrow \mathbf{1} = \mathbf{1}$$

. . . miks **implikatsioon** just niimoodi arvutab !? — nagu tema *tõeväärtustabel* defineerib ? . . .

Võtame vaadelda 2 *verbaalset* lauset, tähistatuna **H** ja **V** :

lause **H** ≡ "vastan eksamiküsimused **veatult**"

lause **V** ≡ "saan hinde **5**"

Nende lausete **H** **V** **eitused** ehk *inversioonid* on seljuhul :

$\overline{\mathbf{H}}$ ≡ "vastan eksamiküsimused **vigadega**"

$\overline{\mathbf{V}}$ ≡ "ma **ei saa** hinnet **5**"

Koostame *järelduslause* | *implikatsiooni* :

$$\mathbf{H} \rightarrow \mathbf{V}$$

... ehk verbaalselt :

" ***kui*** *vastan eksamiküsimused veatult,* ***siis*** *saan hinde 5* "

Edasi omistame erinevaid võimalikke *tõeväärtusi* lausetele **H** ja **V** .

esimene kombinatsioon :

H = 1 **V = 1**

Nõustume kergelt, et selline (verbaalne) *implikatsioon* on TÕENE :

" ***kui*** *vastan eksamiküsimused veatult,* ***siis*** *saan hinde 5* "

. . . või *formaalne* seesama implikatsiooniavaldis operandide *tõeväärtustega* :

$$\mathbf{1 \rightarrow 1 = 1}$$

teine kombinatsioon :

Nüüd vaatame järelduslauset, kus tema mõlemad lihtlaused (eelnevalt TÕESED operandid) on *inverteeritud* ehk nad on nüüd mõlemad saanud tõeväärtuse VALE :

H = 0 **V = 0**

. . . . seljuhul oleme saanud *verbaalse* **kui ..... siis** järelduslause kujul :

" ***kui*** *ma ei vasta eksamiküsimusi veatult,*
siis *ma ei saa hinnet 5* "

Nõustume, et see liitlause | *implikatsioon* tundub meile samuti TÕENE .

Selle *implikatsiooni* operandide *tõeväärtused* on : $\mathbf{0 \rightarrow 0 = 1}$

kolmas kombinatsioon :

Edasi — modifitseerime selle *implikatsiooni* kujule, kus *eeldus* on TÕENE kuid *järeldus* on VALE :

H = 1 **V = 0**

. . . . misjuhul *verbaalne* **kui.....siis** järelduslause on :

" ***kui*** *vastan eksamiküsimused veatult,*
siis *ma* ***ei*** *saa hinnet 5* "

Jällegi nõustume, et see järelduslause tundub meile VALE . . . . . ja meie intuitsioon on korrektne : see lause **on** VALE ka

implikatsiooni definitsiooni kohaselt : $\mathbf{1 \rightarrow 0 = 0}$

Siiamaani tundub *implikatsiooni* käitumine igati ootuspärane..... kuid üks ehk viimane operandiväärtuste kombinatsioon on veel vaatlemata :

neljas kombinatsioon :

Lõpuks — mis juhtub *implikatsiooniga* $\mathbf{H \rightarrow V}$ kui *eeldus* on VALE kuid *järeldus* on TÕENE :

H = 0 **V = 1**

. . . . seljuhul saaksime *verbaalse* **kui.....siis** järelduslause :

" ***kui*** *vastan eksamiküsimused vigadega,* ***siis*** *saan hinde 5* "

Esmamuljel me soovime uskuda et see *järelduslause* peaks olema VALE !?
. . . . kuid nüüd oleme "takerdunud" olukorda, kus meie intuitsioon on k o n f l i k t i s *implikatsiooni* definitsiooniga :

Nagu näeme *implikatsiooni* definitsioonist : $\mathbf{0 \rightarrow 1 = 1}$

Järeldamine | *implikatsioon* omab mõtet ainult siis,
kui *eeldus* on TÕENE.

Siinkohal oleme jõudnud *implikatsiooni* ühe tähtsa omaduseni :

Kui *eeldus* on VALE, siis kogu **järeldamine** | *implikatsioon* loetakse TÕESEKS — olenemata mis on samal ajal *järelduse* tõeväärtuseks.

meenutame *implikatsiooni* definitsiooni / arvutamist :

$$\mathbf{0} \rightarrow \mathbf{0} = \mathbf{1}$$
$$\mathbf{0} \rightarrow \mathbf{1} = \mathbf{1}$$
$$\mathbf{1} \rightarrow \mathbf{0} = \mathbf{0}$$
$$\mathbf{1} \rightarrow \mathbf{1} = \mathbf{1}$$

Kui *implikatsioon* on TÕENE juba üksi sellepärast, et *eeldus* on VALE, siis sellist *implikatsiooni* nimetatakse **vaikimisi tõeseks** :

$\mathbf{0} \rightarrow 0 = \mathbf{1}$ vaikimisi TÕENE

$\mathbf{0} \rightarrow 1 = \mathbf{1}$ vaikimisi TÕENE

$1 \rightarrow 0 = 0$

$1 \rightarrow 1 = 1$

Vaatleme *implikatsiooni* tõeväärtustabeli 2. ja 4. rea implikatsioone :

$$0 \rightarrow 0 = 1$$
$$\mathbf{0} \rightarrow \mathbf{1} = \mathbf{1}$$
$$1 \rightarrow 0 = 0$$
$$\mathbf{1} \rightarrow \mathbf{1} = \mathbf{1}$$

Siin selgub järgmine oluline omadus :

Kui **järeldus** on TÕENE, siis ongi kogu *järeldamine* TÕENE — olenemata mis on parajasti **eelduse** tõeväärtuseks.

	inversioon	konjunktsioon	disjunktsioon	ekvivalents	implikatsioon
A B	$\overline{A}$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \leftrightarrow B$	$A \rightarrow B$
0 0	1	0	0	1	**1**
0 1	1	0	1	0	**1**
1 0	0	0	1	0	**0**
1 1	0	1	1	1	**1**

eitus	loogiline korrutamine JA - *tehe*	loogiline liitmine VÕI - *tehe*	samaväärsus	järeldamine

Vaadates peale **implikatsiooniga** seotud mõistetele :

eeldus → *järeldus*

____________________/

J Ä R E L D A M I N E

. . . aitavad samanimelised terminid arusaada / nõustuda faktiga, et operand "*järeldus*" ja kogu liitlause "*järeldamine*" — on olemuselt "sarnased" mõisted ja osutuvad olema alati sama tõeväärtusega.

. . . mis oleks (halvasti) kui *implikatsioon* oleks **valest** eeldusest saadud **õige** järelduse korral tervikuna VALE järeldamine ehk kui *implikatsiooni* tulemus oleks seljuhul (kah) 0 : $\mathbf{0} \rightarrow \mathbf{1} = \mathbf{0}$ **?**

Seljuhul oleks *implikatsiooni tõeväärtustabel* selline :

	inversioon	konjunktsioon	disjunktsioon	ekvivalents	**POLE** implikatsioon!
A B	$\overline{A}$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \leftrightarrow B$	$A \rightarrow B$
0 0	1	0	0	1	**1**
0 1	1	0	1	0	**0**
1 0	0	0	1	0	**0**
1 1	0	1	1	1	**1**

Seljuhul osutuks *implikatsiooni* ja *ekvivalentsi* tõeväärtustabel täpselt samasuguseks :

	inversioon	konjunktsioon	disjunktsioon	**ekvivalents**	**POLE** implikatsioon!
A B	$\overline{A}$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \leftrightarrow B$	$A \rightarrow B$

0 0	1	0	0	1	1
0 1	1	0	1	0	0
1 0	0	0	1	0	0
1 1	0	1	1	1	1

. . . misjuhul need 2 loogikatehet ei eristuks teineteisest üldse, kuna nad "arvutaksid" identselt samamoodi. Sellisel hüpoteetilisel juhul nad oleks "sama tehe" ehk oleks sünonüümid — mis tähendaks vastuolulist olukorda.

Seega on mitu põhjust, miks *implikatsioon* $\mathbf{0 \rightarrow 1}$ ei saa olla VALE (kuigi me vastavat v e r b a a l s e t lauset lugedes intuitiivselt sooviksime nii arvata....)

IMPLIKATSIOON vs EKVIVALENTS

Kui soovime, et see lause oleks (intuitsiooniga kokkusobivalt) VALE :

" **kui** vastan eksamiküsimused vigadega, **siis** saan hinde 5 "

. . . siis selleks tuleks sõnastada kogu algne liitlause teisiti :

" hinde 5 saan **siis ja ainult siis, kui** vastan eksamiküsimused veatult"

Seljuhul oleks sidumiskonstruktsiooniks mitte *implikatsioon* vaid *ekvivalents* : $\mathbf{H \leftrightarrow V}$ ja lihtlausete "järjekord" liitlauses ei oleks enam oluline : $\mathbf{H \leftrightarrow V = V \leftrightarrow H}$

Eelneva verbaalse lause saaks sõnastada ka koostislausete äravahetatud järjekorras :

" eksamiküsimused vastasin veatult **siis ja ainult siis, kui** sain hinde 5"

Kui peame sellist *ekvivalentsilauset* tõeseks: $\mathbf{H \leftrightarrow V = 1}$

siis tõene on ka :

$$\mathbf{\overline{H} \leftrightarrow \overline{V} = 1}$$

ehk *verbaalselt* :

" hinnet 5 ma ei saa **siis ja ainult siis, kui** vastan eksamiküsimused vigadega" (TÕENE)

Selline *ekvivalentsilause* muutub kohe VALEKS kui eitame / *inverteerime* puha kumba tema koostislauset — nagu intuitiivselt ootamegi <u>vastamise õigsuse</u> ja <u>hinde</u> seosena :

$\mathbf{\overline{H} \leftrightarrow V = 0}$ ja samuti $\mathbf{H \leftrightarrow \overline{V} = 0}$

. . . ehk

$$\mathbf{0 \leftrightarrow 1 = 0}$$

$$\mathbf{1 \leftrightarrow 0 = 0}$$

ehk *verbaalselt* :

" hinnet 5 ma ei saa **siis ja ainult siis, kui** vastan eksamiküsimused veatult" (VALE)

" hinde 5 saan **siis ja ainult siis, kui** vastan eksamiküsimused vigadega" (VALE)

! *tüüpiline viga:*

Vaadeldes tehet *implikatsioon* :

$$\mathbf{A \rightarrow B}$$

. . . võime (ekslikult) hakata ettekujutama nagu see tehe oleks *ekvivalents* :

$$\mathbf{A \leftrightarrow B}$$

. . . misjuhul hakkame ka ootama, et see *implikatsioon* arvutaks / väärtustuks nagu *ekvivalents*