

Verbaalsed ja Formaalsed esitused

verbaalne esitus on infoesitus lingvistilise keele abil

(tekst või kõne, nii *suuline* kui ka *kirjalik* esitus)

Näiteks *ajalugu* ja *filosoofia* on valdkonnad, kus kogu informatsioon on esitatud ainult *verbaalselt*.

formaalne esitus on (kirjalik) infoesitus ilma lingvistilise keele abita

(valemid, võrrandid, sümbolid . . . — infoesitus mingi "kokkulepitud märgisüsteemi" abil)

Näiteks *matemaatika*, *füüsika* ja *keemia* on valdkonnad, kus infot esitatakse nii *verbaalselt* kui ka *formaalselt*.

Mõtlemine on alati *verbaalne* ehk toimub mingi lingvistilise keele abil.



Mistahes formaalne esitus on algupäraselt verbaalse info "salvestamiseks". Pole olemas "*formaalset mõtlemist*"; on olemas *formaalne väljendusoskus*.

Formaalsete esituste ainus otstarve on nendes sisalduv info hiljem jälle verbaalseks (ehk mõnda lingvistilisse keelde) tagasi "üles lugeda" (taastada).

Teisiti väljendudes: kõike, mida saab esitada *formaalselt*, saab esitada ka *verbaalselt*.

Mistahes *formaalne* esitus peab olema **üheselt** tõlgendatav (loetav).

Formalismina ei õnnestu esitada mitte igasugust verbaalset infot, kuid loogilise mõtlemise konstruktsioonide jaoks on piisavalt head formaalsed väljendusvahendid olemas.

"mitteformaalne" $\equiv$ "verbaalne" (sünonüümid)

LAUSEARVUTUS

Lausearvutus on loogilise mõtlemise matemaatiline mudel.

Lausearvutuslauseid tähistame formaalselt suurtähtedega: **A, B, P, Q . . .**

Lause on *verbaalne* väljend, mis "väidab / deklareerib mingit fakti" ja

mille kohta on võimalik otsustada / hinnata, kas see on TÕENE või VALE (kusjuures mõlemad *tõeväärtused* ei saa kehtida korraga samaaegselt).

näide :

need laused sobivad olema *lausearvutuse laused* :

"19 on algarv"

"popcorn on maitsev"

"siga suudab lennata"

need laused ei ole *lausearvutuse laused* :

"Kõigi maade proletaarlased – ühinege !"

"kuipalju kell on ?"

"sõida ettevaatlikult"

Meie eelistame kontekstis juba varakult olla seotud *digitaalseadmetega*, seega tõeväärtust TÕENE tähistame: **1** ja tõeväärtust VALE: **0**

1 and **0** on ka tavalised tähistused *digitaalsignaalidele digitaalseadmetes*.

Formaalsetes esitustes tähistame *lauseid* (tavaliselt) suurtähtedega :

A B C P Q

Lauseid mis on ise "kõige lihtsamad" ehk ei koosne **mitmest** veelgi lihtsamast alamlausel — nimetatakse *lihtlauseteks*.

(3 lausenäidet eespool — on kõik *lihtlauseid*)

Lihtlausest koostatakse kindlate sidesõnade ja loogiliste konstruktsioonide abil *liitlauseid*:

" kui palka ei tõsteta või tööaega ei vähendata, siis algab streik "
 " ülemus on kohal siis ja ainult siis, kui tema auto on maja ees "
 " kui lähed suusatama, siis vajad suuski ja suusasaapaid ja suusakeppe "

Lausearvutuse lihtlauseid / osalauseid seotakse liitlauseteks 5 loogilise konstruktsiooni ehk **loogikatehte** abil.

4 sidumiskonstruktsiooni seovad igaüks kahte lauset (*binaarsed* loogikatehted) ja 1 tehe viiest on rakendatav üksikule lausele (*unaarne* loogikatehe)

verbaalne esitus	formaalne tähistus
P eitust : " mitte P "; " pole õige, et P "	$\overline{P}$
ühe alternatiivi kehtimise nõue : " P või Q "	$P \vee Q$
tingimuste samaaegse kehtimise nõue : " P ja Q "	$P \wedge Q$
samaväärsus (<i>ekvivalents</i>) : " P (siis ja) ainult siis, kui Q "	$P \leftrightarrow Q$
järeldumine : "P kehtimisest järeldub Q kehtimine " " Kui P , siis Q "	$P \rightarrow Q$

arvutiga kirjutades saab tehemärgid jm. märgid / sümbolid valida fondist nimega **Symbol** (puuduvad **Times New Roman** fondis)



JA-tehte märgina kasutatakse ka sümbolit 'ampersand' : **&** ($\& \equiv \wedge$)

Ekvivalentsitehte märgina kasutatakse ka sümbolit **~** ($\sim \equiv \leftrightarrow$)

VÕI-tehte märgina kasutatakse ka sümbolit **+** ($+ \equiv \vee$)

eitust tähistatakse erinevates allikates erinevalt : $\overline{A} \equiv \neg A \equiv A'$

Aritmeetilise liitmise tehemärki ' + ' sobib kasutada **VÕI**-tehte tehemärgina sellepärast, et **VÕI**-tehe on *loogiline liitmine*, olles "tavalise" aritmeetilise liitmise analoog loogikas.

(Sümbol ' $\equiv$ ' on siin ja edaspidi kasutusel tähenduses "on samaväärne")

Loogikatehted lausearvutuses

tehemärk	tehte nimi ja selgitus
$\overline{}$	loogiline eitust ehk inversioon
$\wedge$	loogiline korrumine ehk konjunktsioon ehk JA -tehe (aritmeetilise korrumine analoog loogikas)
$\vee$	loogiline liitmine ehk disjunktsioon ehk VÕI -tehe (aritmeetilise liitmise analoog loogikas)
$\leftrightarrow$	loogiline samaväärsus ehk ekvivalents (võrdusmärgi ' = ' analoog loogikas)
$\rightarrow$	loogiline järeldamine ehk implikatsioon (ei oma aritmeetikas analoogi)

Edaspidi eelistame loogikatehete nimedena kasutada termineid *inversioon disjunktsioon konjunktsioon ekvivalents implikatsioon*

Implikatsioonitehte operandide staatus: *eeldus $\rightarrow$ järeldus*

Ekvivalentsitehte mõlemad operandid on samaaegselt teineteise eelduseks ja järelduseks :

kui $P \leftrightarrow Q$ siis $P \rightarrow Q$ ja samal ajal ka $Q \rightarrow P$

Loogikatehete definitsioonid

Eelnevalt vaatasime :

- mis on loogikatehete **nimed** ;
- mis on nende *verbaalne tähendus* igapäevases / lingvistilises keeles;
- milliste **tehtemärkidega** neid esitatakse avaldistes.

... kuid eelnev ei kirjelda, kuidas need tehted arvutavad .

Loogikatehete definitsioonid määravad nende resultaadi operandiväärtuste kõikide kombinatsioonide korral

... ehk määravad nende "käitumise" (arvutamise) kõikvõimalikes olukordades ...

Loogikatehete operandideks on *tõeväärtused* (**0** ja **1**) ja tulemuseks on samuti tõeväärtus.

Seega loogikatehted "*töötlevad tõeväärtusi uuteks tõeväärtusteks*".

Lausearvutuses kasutatakse **ühte** *unaarset* (ühe operandiga) ja **nelja** *binaarset* (kahe operandiga) tehet.

Binaarse loogikatehte kumbki operand saab omada ainult **kahte** teineteist välistavat tõeväärtust — misjuhul ilmneb, et kokku eksisteerib täpselt **4** võimalikku operandiväärtuste kombinatsiooni :

A B					
0 0					
0 1					
1 0					
1 1					

Osutub, et iga loogikatehte "käitumine" on täielikult kirjeldatav / defineeritav kompaktses (kõigest) 4-realises tabelis.

tõeväärtustabel

Tõeväärtustabelis on *tõeväärtuste* kõikvõimalikud kombinatsioonid loetletud kindlas järjekorras alates **000...0** kuni **111...1**

Eelnevalt loetlesime kõik **5** loogikatehet mida *lausearvutus* kasutab :

	inversioon	konjunktsioon	disjunktsioon	ekvivalents	implikatsioon
A B	$\overline{A}$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \leftrightarrow B$	$A \rightarrow B$
0 0					
0 1					
1 0					
1 1					

Loogikatehted genereerivad "uusi" tõeväärtusi (**0** | **1**) oma operandidest — mis on samuti *tõeväärtused* (**0** | **1**)

Loogikatehete **tulemused** nende kõikvõimalike operandide jaoks on :

	inversioon	konjunktsioon	disjunktsioon	ekvivalents	implikatsioon
A B	$\overline{A}$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \leftrightarrow B$	$A \rightarrow B$
0 0	1	0	0	1	1
0 1	1	0	1	0	1
1 0	0	0	1	0	0
1 1	0	1	1	1	1
alternatiivne nimi :	eitus	loogiline korrutamine JA - tehe	loogiline liitmine VÕI - tehe	samaväärsus	järeldamine

4 esimese loogikatehte käitumine / arvutamine on lihtne arusaada.

Unaarset tehet *inversioon* võib eelnevas tabelis esitada ükskõik kumba loogikamuutujat (A või B) kasutades; eelnevas tabelis defineeritakse ta juhtumisi **A** kaudu.

INVERSIOON on lihtsaim loogikatehe : ta pöörab oma operandi väärtuse vastupidiseks.

Konjunksioon ja Disjunksioon on lihtsaimad binaarsed loogikatehted.

KONJUNKTSIOON käitub / arvutab nagu aritmeetiline korrutamine (olles seega loogiliseks korrutamiseks) :

	inversioon	konjunksioon	disjunksioon	ekvivalents	implikatsioon
A B	$\overline{A}$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \leftrightarrow B$	$A \rightarrow B$
0 0	1	0	0	1	1
0 1	1	0	1	0	1
1 0	0	0	1	0	0
1 1	0	1	1	1	1
eitus loogiline korrutamine loogiline liitmine samaväärsus järeldamine					
JA - tehe VÕI - tehe					

tema verbaalne "arvutamispõhimõte" on sõnastatav kujul :

... üksainuski operandiväärtus VALE (0) sunnib kogu konjunksiooni resultaadiks VALE (0) :

$1 \wedge 1 \wedge 1 \wedge 1 \wedge 1 \wedge 1 \wedge 1 = 1$ kuid
 $1 \wedge 1 \wedge 1 \wedge 1 \wedge 0 \wedge 1 \wedge 1 = 0$

DISJUNKTSIOON käitub / arvutab nagu aritmeetiline liitmine (olles seega loogiliseks liitmiseks) :

	inversioon	konjunksioon	disjunksioon	ekvivalents	implikatsioon
A B	$\overline{A}$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \leftrightarrow B$	$A \rightarrow B$
0 0	1	0	0	1	1
0 1	1	0	1	0	1
1 0	0	0	1	0	0
1 1	0	1	1	1	1
loogiline loogiline					

eitus	korrutamine	liitmine	samaväärsus	järeldamine
	JA - tehe	VÕI - tehe		

tema verbaalne "arvutamispõhimõte" on sõnastatav kujul :

... üksainuski operandiväärtus TÕENE (1) sunnib kogu disjunksiooni resultaadiks TÕENE (1) :

$0 \vee 0 \vee 0 \vee 0 \vee 0 \vee 0 \vee 0 = 0$ kuid
 $0 \vee 0 \vee 1 \vee 0 \vee 0 \vee 0 \vee 0 = 1$

Tehted inversioon , konjunksioon ja disjunksioon on elementaarsed loogikatehted. Nad pole avaldatavad mingite teiste (veelgi) lihtsamate loogikatehete kaudu, kuna nad ise ongi "lihtsaimad" tehted.

Kõik muud loogikatehted (ka implikatsioon ja ekvivalents) on avaldatavad kolme elementaarse loogikatehte:

inversiooni , konjunksiooni ja disjunksiooni kaudu.

EKVIVALENTS (samaväärsus)

See tehe "tunneb ära" võrdsed operandid :

Kui mõlemad operandid omavad sama loogikaväärtust, siis ekvivalents väärtustub 1-ks (TÕENE) ;

Kui mõlemad operandid omavad erinevat loogikaväärtust, siis ekvivalents väärtustub 0-ks (VALE) .

	inversioon	konjunksioon	disjunksioon	ekvivalents	implikatsioon
A B	$\overline{A}$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \leftrightarrow B$	$A \rightarrow B$
0 0	1	0	0	1	1
0 1	1	0	1	0	1
1 0	0	0	1	0	0
1 1	0	1	1	1	1
eitus loogiline korrutamine loogiline liitmine samaväärsus järeldamine					

IMPLIKATSIOON (järeldamine)

Selle loogikatehte käitumine on "keerulisem".

	inversioon	konjunktsioon	disjunktsioon	ekvivalents	implikatsioon
A B	$\overline{A}$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \leftrightarrow B$	$A \rightarrow B$
0 0	1	0	0	1	1
0 1	1	0	1	0	1
1 0	0	0	1	0	0
1 1	0	1	1	1	1
eitus loogiline korrumine JA - tehe loogiline liitmine VÕI - tehe samaväärsus järeldamine					

Juba nimetasime, et *implikatsiooni* operandid omavad erinevat staatust ja täpsustavaid nimetusi:

eeldus $\rightarrow$ *järeldus*

Näeme *implikatsiooni* definitsioonist, et see tehe on enamasti TÕENE. VALE on ta ainult ühel juhul: kui *eeldus* on **tõene** kuid *järeldus* on **vale**:

$$1 \rightarrow 0 = 0$$

... ülejäänud 3 võimalikku operandide kombinatsiooni annavad TÕESE *implikatsiooni*:

$$0 \rightarrow 0 = 1$$

$$0 \rightarrow 1 = 1$$

$$1 \rightarrow 1 = 1$$



... miks *implikatsioon* niimoodi arvutab!? — nagu tema tõeväärtustabel defineerib?...

Võtame vaadelda 2 *verbaalset* lauset, tähistatuna **H** ja **V**:

lause **H** $\equiv$ "vastan eksamiküsimused **veatult**"

lause **V** $\equiv$ "saan hinde **5**"

Nende lausete **H** **V** *eitused* ehk *inversioonid* on seljuhul:

$\overline{H}$ $\equiv$ "vastan eksamiküsimused **vigadega**"

$\overline{V}$ $\equiv$ "ma **ei** saa hinnet **5**"

Koostame *järelduslause* | *implikatsiooni*:

$$H \rightarrow V$$

... ehk *verbaalselt*:

"**kui** vastan eksamiküsimused veatult, **siis** saan hinde 5"

Edasi omistame erinevaid võimalikke tõeväärtusi lausetele **H** ja **V**.

$$H = 1$$

$$V = 1$$

Nõustume kergelt, et selline (verbaalne) *implikatsioon* on TÕENE:

"**kui** vastan eksamiküsimused veatult, **siis** saan hinde 5"

... või *formaalne* seesama *implikatsiooni* avaldis operandide tõeväärtustega:

$$1 \rightarrow 1 = 1$$

Nüüd vaatame *järelduslause*, kus tema mõlemad lihtlauseid (eelnevalt TÕESED operandid) on *inverteeritud* ehk nad on nüüd mõlemad saanud tõeväärtuse VALE:

$$H = 0$$

$$V = 0$$

... seljuhul oleme saanud *verbaalse* **kui** **siis** *järelduslause* kujul:

"*kui* ma ei vasta eksamiküsimusi veatult,
siis ma ei saa hinnet 5 "

Nõustume, et see liitlause | *implikatsioon* tundub meile samuti TÕENE .
Selle *implikatsiooni* operandide tõeväärtused on : $0 \rightarrow 0 = 1$

Edasi — modifitseerime selle *implikatsiooni* kujule, kus *eeldus* on TÕENE kuid *järeldus* on VALE :

$$H = 1 \qquad V = 0$$

.... misjuhul *verbaalne* *kui*....*siis* järelduslause on :

"*kui* vastan eksamiküsimused veatult,
siis ma ei saa hinnet 5 "

Jällegi nõustume, et see järelduslause tundub meile VALE ja meie intuitsioon on korrektne : see lause on VALE ka

implikatsiooni definitsiooni kohaselt : $1 \rightarrow 0 = 0$

Siia maani tundub *implikatsiooni* käitumine igati ootuspärane..... kuid üks ehk viimane operandiväärtuste kombinatsioon on veel vaatlemata :

Lõpuks — mis juhtub *implikatsiooniga* $H \rightarrow V$ kui *eeldus* on VALE kuid *järeldus* on TÕENE :

$$H = 0 \qquad V = 1$$

.... seljuhul saaksime *verbaalse* *kui*....*siis* järelduslause :

"*kui* vastan eksamiküsimused vigadega, *siis* saan hinde 5 "

Esmamuljel me soovime uskuda et see *järelduslause* peaks olema VALE !?
.... kuid nüüd oleme "takerdunud" olukorda, kus meie intuitsioon on konfliktis *implikatsiooni* definitsiooniga :

Nagu näeme *implikatsiooni* definitsioonist : $0 \rightarrow 1 = 1$

Järeldamine | *implikatsioon* omab mõtet ainult siis, kui *eeldus* on TÕENE.

Siinkohal oleme jõudnud *implikatsiooni* ühe tähtsa omaduseni :

Kui *eeldus* on VALE, siis kogu *järeldamine* | *implikatsioon* loetakse TÕESEKS — olenemata mis on samal ajal *järelduse* tõeväärtuseks.

meenutame *implikatsiooni* definitsiooni / arvutamist :

$$0 \rightarrow 0 = 1$$

$$0 \rightarrow 1 = 1$$

$$1 \rightarrow 0 = 0$$

$$1 \rightarrow 1 = 1$$

Kui *implikatsioon* on TÕENE juba üksi sellepärast, et *eeldus* on VALE, siis sellist *implikatsiooni* nimetatakse *vaikimisi tõeseks* :

$$0 \rightarrow 0 = 1 \quad \text{vaikimisi TÕENE}$$

$$0 \rightarrow 1 = 1 \quad \text{vaikimisi TÕENE}$$

$$1 \rightarrow 0 = 0$$

$$1 \rightarrow 1 = 1$$

Vaatleme *implikatsiooni* tõeväärtustabeli 2. ja 4. rea implikatsioone :

$$0 \rightarrow 0 = 1$$

$$0 \rightarrow 1 = 1$$

$$1 \rightarrow 0 = 0$$

$$1 \rightarrow 1 = 1$$

Siin selgub järgmine oluline omadus :

Kui *järeldus* on TÕENE, siis ongi kogu *järeldamine* TÕENE — olenemata mis on parajasti *eelduse* tõeväärtuseks.

Vaadates peale **implikatsiooniga** seotud mõistetele :

eeldus $\rightarrow$ *järeldus*

J Ä R E L D A M I N E

... aitavad samanimelised terminid arusaada / nõustuda faktiga, et operand "järeldus" ja kogu liitlause "järeldamine" — on olemuselt "sarnased" mõisted ja osutuvad olema alati sama tõeväärtusega.



... mis oleks (halvasti) kui *implikatsioon* oleks **valest** eeldusest saadud **õige** järelduse korral tervikuna VALE järeldamine ehk kui *implikatsiooni* tulemus oleks seljuhul (kah) 0 : $0 \rightarrow 1 = 0$?

Seljuhul oleks *implikatsiooni* tõeväärtustabel selline :

	inversioon	konjunktsioon	disjunktsioon	ekvivalents	POLE implikatsioon!
A B	$\overline{A}$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \leftrightarrow B$	$A \rightarrow B$
0 0	1	0	0	1	1
0 1	1	0	1	0	0
1 0	0	0	1	0	0
1 1	0	1	1	1	1

Seljuhul osutuks *implikatsiooni* ja *ekvivalentsi* tõeväärtustabel täpselt samasuguseks :

	inversioon	konjunktsioon	disjunktsioon	ekvivalents	POLE implikatsioon!
A B	$\overline{A}$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \leftrightarrow B$	$A \rightarrow B$
0 0	1	0	0	1	1
0 1	1	0	1	0	0
1 0	0	0	1	0	0
1 1	0	1	1	1	1

... misjuhul need 2 loogikatehet ei eristuks teineteisest üldse, kuna nad "arvutaksid" identselt samamoodi. Sellisel hüpoteetilisel juhul nad oleks "sama tehe" ehk oleks sünonüümid — mis tähendaks vastuolulist olukorda.

Seega on mitu põhjust, miks *implikatsioon* $0 \rightarrow 1$ ei saa olla VALE

IMPLIKATSIOON vs EKVIVALENTS

Kui soovime, et see lause oleks (intuitsiooniga kokkusobivalt) VALE :
" **kui vastan eksamiküsimused vigadega, siis saan hinde 5** "
... siis selleks tuleks sõnastada kogu algne liitlause teisiti :

" **hinde 5 saan siis ja ainult siis, kui vastan eksamiküsimused veatult** "

Seljuhul oleks sidumiskonstruktsiooniks mitte *implikatsioon* vaid *ekvivalents* : $H \leftrightarrow V$ ja liitlause "järjekord" liitlause ei oleks enam oluline : $H \leftrightarrow V = V \leftrightarrow H$

Eelneva verbaalse lause saaks sõnastada ka koostislause äravahetatud järjekorras :

" **eksamiküsimused vastasin veatult siis ja ainult siis, kui sain hinde 5** "

Kui peame sellist *ekvivalentsilause* tõseks: $H \leftrightarrow V = 1$
siis tõene on ka :

$$\overline{H} \leftrightarrow \overline{V} = 1$$

ehk verbaalselt :

" **hinnet 5 ma ei saa siis ja ainult siis, kui vastan eksamiküsimused vigadega** " (TÕENE)

Selline *ekvivalentsilause* muutub kohe VALEKS kui eitame / *inverteerime* puha kumba tema koostislause — nagu intuiitiivselt ootamegi vastamise õigsuse ja hinde seosena :

$$\overline{H} \leftrightarrow V = 0$$

ja samuti

$$H \leftrightarrow \overline{V} = 0$$

... ehk

$$0 \leftrightarrow 1 = 0$$

$$1 \leftrightarrow 0 = 0$$

ehk verbaalselt:

"hinnet 5 ma ei saa **siis ja ainult siis, kui** vastan eksamiküsimused veatult" (VALE)

"hinde 5 saan **siis ja ainult siis, kui** vastan eksamiküsimused vigadega" (VALE)

! tüüpiline viga:

Vaadeldes tehet *implikatsioon* :

$$A \rightarrow B$$

...võime (ekslikult) hakata ettekujutama nagu see tehe oleks *ekvivalents* :

$$A \leftrightarrow B$$

... misjuhul hakkame ka ootama, et see *implikatsioon* arvutaks / väärtustuks nagu *ekvivalents*



Tautoloogia. Vastuolu

Lause on *samaselt tõene*, kui ta omandab tõeväärtuse 1 koostislausete mistahes väärtuskombinatsiooni korral.

Samaselt tõest lauset nimetatakse ka **tautoloogiaks**.

Lihtsaim näide tautoloogiast oleks lause:

$$A \vee \overline{A}$$

Lause on *samaselt väär / vale*, kui ta omandab tõeväärtuse 0 koostislausete mistahes väärtuskombinatsiooni korral.

Samaselt väär lauset nimetatakse ka **vastuoluks**.

Lihtsaim näide samaselt väärast lausest oleks:

$$A \wedge \overline{A}$$

Samaselt tõesed laused võib kõikjal asendada (tähistada) konstandiga 1 ja samaselt väärad laused konstandiga 0.

Kvantorid $\forall$ $\exists$

Kui soovime väita, et mingi lause "kehtib alati" siis kasutame üldsuse kvantorit: $\forall$

$$\forall x (\dots \text{mistahes lause muutuja } x \text{ osalusel } \dots)$$

Üldsuse kvantorit $\forall$ interpreteeritakse valemi lugemisel tähenduses "iga".

Kui soovime väita, lause kehtib vähemalt ühel juhul

..... siis kasutame sellise väite kompaktsemaks esitamiseks

olemasolu kvantorit ehk eksistentsikvantorit $\exists$:

$$\exists x (\dots \text{mistahes lause muutuja } x \text{ osalusel } \dots)$$

Eksistentsikvantorit $\exists$ interpreteeritakse valemi lugemisel tähenduses "leidub" ehk "eksisteerib".

Eksistentsikvantorit saab ka "eitada": $\overline{\exists x}$ "ei leidu x -i ..."

Hüüumärgiga eksistentsikvantor $\exists!$ x väidab :

"leidub täpselt üks x "

Kvantorid osutuvad vajalikeks edaspidistes definitsioonides.