Jääkfunktsioon

Kui asendada n-muutuja funktsiooni $f(x_1\, x_2\, \ldots\ldots\, x_n)$ avaldises osad tema muutujad konstantidega **0** või **1**, siis selliselt saadavat lihtsamat loogikafunktsiooni nimetatakse algse n-muutuja funktsiooni **jääkfunktsiooniks**.

Kui asendada n-muutuja funktsiooni $f(x_1\, x_2 \ldots x_i \ldots x_n)$ avaldises **üks** tema muutuja x_i konstandiga **0** või **1**, siis on jääkfunktsiooniks ($\boldsymbol{n-1}$)-muutuja funktsioon, mida tähistatakse :

$$f(x_1 \ldots x_{i-1}\, \mathbf{0}\;\; x_{i+1} \ldots x_n) \quad \text{või} \quad f(x_1 \ldots x_{i-1}\, \mathbf{1}\;\; x_{i+1} \ldots x_n)$$

Selline tähistus näitab kõike vajalikku infot *jääkfunktsiooni* kohta:

— m i l l i n e muutuja x_i on asendatud / fikseeritud konstandiks ;

— kumb väärtus **0** või **1** on omistatud sellele muutujale x_i .

Jääkfunktsioon ei sisalda enam seda muutujat x_i , mis asendati konstandiks.

Funktsiooni tõeväärtustabelis "sisalduvad" ka kõikide tema **jääkfunktsioonide** tõeväärtustabelid.

Vaatame näiteks hiljutise avaldise

$$f_D(x_1 x_2 x_3 x_4) \;=\; \bar{x}_1 x_3 \;\vee\; \bar{x}_2 \bar{x}_4$$ tõeväärtustabelit :

$x_1\, x_2\, x_3\, x_4$	f_D
0 0 0 0	1
0 0 0 1	0
0 0 1 0	1
0 0 1 1	1
0 1 0 0	0
0 1 0 1	0
0 1 1 0	1
0 1 1 1	1
1 0 0 0	1
1 0 0 1	0
1 0 1 0	1
1 0 1 1	0
1 1 0 0	0
1 1 0 1	0
1 1 1 0	0
1 1 1 1	0

kuidas saaksime siit $f(x_1 x_2 x_3 x_4) \;=\; \bar{x}_1 x_3 \;\vee\; \bar{x}_2 \bar{x}_4$
jääkfunktsioonide *tõeväärtustabelid ?*

(näiteks) $x_2 = 0$ korral saame jääkfunktsiooni $f(x_1\, \mathbf{0}\, x_3\, x_4)$ mille tõeväärtustabel on need **8 tumedamat rida** algse funktsiooni tabelis :

$x_1\, x_2\, x_3\, x_4$	$f(x_1\, \mathbf{0}\, x_3\, x_4)$
0 0 **0 0**	1
0 0 **0 1**	0
0 0 **1 0**	1
0 0 **1 1**	1
0 1 0 0	0
0 1 0 1	0

0 1 1 0	1
0 1 1 1	1
1 0 **0 0**	**1**
1 0 **0 1**	**0**
1 0 **1 0**	**1**
1 0 **1 1**	**0**
1 1 0 0	0
1 1 0 1	0
1 1 1 0	0
1 1 1 1	0

kuidas saaksime sama funktsiooni

$f(x_1 x_2 x_3 x_4) = \bar{x}_1 x_3 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_4$ *jaoks*

tema jääkfunktsiooni $f(x_1\, x_2\, \mathbf{1}\, x_4)$ *tõeväärtustabeli ?*

$x_1 x_2 x_3 x_4$	f
0 0 0 0	**1**
0 0 0 1	**0**
0 0 1 0	**1**
0 0 1 1	**1**
0 1 0 0	**0**
0 1 0 1	**0**
0 1 1 0	**1**
0 1 1 1	**1**
1 0 0 0	**1**
1 0 0 1	**0**
1 0 1 0	**1**
1 0 1 1	**0**
1 1 0 0	**0**
1 1 0 1	**0**
1 1 1 0	**0**
1 1 1 1	**0**

$x_3 = 1$ korral saame jääkfunktsiooni $f(x_1\, x_2\, \mathbf{1}\, x_4)$ mille tõeväärtustabel on need **8 tumedamat rida** algse funktsiooni tabelis :

$x_1 x_2 x_3 x_4$	$f(x_1\, x_2\, \mathbf{1}\, x_4)$
0 0 0 0	1
0 0 0 1	0
0 0 1 **0**	**1**
0 0 1 **1**	**1**
0 1 0 0	0
0 1 0 1	0
0 1 1 **0**	**1**
0 1 1 **1**	**1**
1 0 0 0	1
1 0 0 1	0
1 0 1 **0**	**1**
1 0 1 **1**	**0**
1 1 0 0	0
1 1 0 1	0
1 1 1 **0**	**0**
1 1 1 **1**	**0**

ülesanne:

Leida jääkfunktsioonid $f(x_1\, \mathbf{0}\, x_3\, x_4)$ ja $f(x_1\, \mathbf{1}\, x_3\, x_4)$ 4-muutuja funktsioonile :

$$f = x_1 x_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_4 \vee x_1 \bar{x}_2$$

$$f(x_1\, \mathbf{0}\, x_3\, x_4) = x_1 \cdot \mathbf{0} \cdot \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 \cdot \mathbf{1} \cdot x_4 \vee x_1 \cdot \mathbf{1} =$$

$$\bar{x}_1 x_4 \vee x_1 = \dots$$
$$= x_4 \vee x_1$$

$$f = x_1 x_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_4 \vee x_1 \bar{x}_2$$

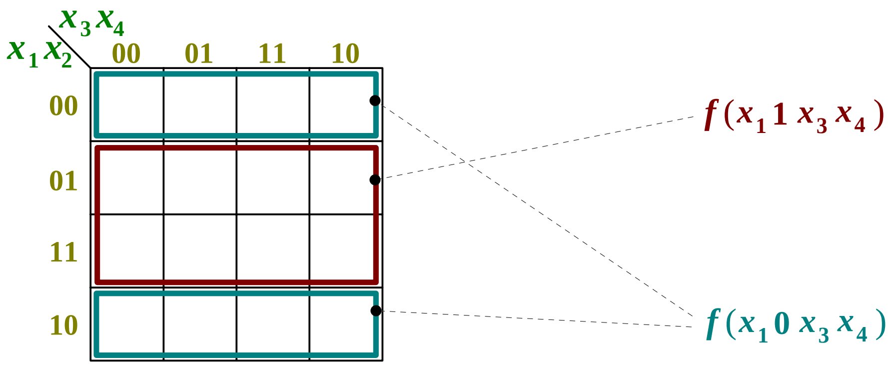
$$f(x_1\, 1\, x_3 x_4) = x_1 \cdot 1 \cdot \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 \cdot 0 \cdot x_4 \vee x_1 \cdot 0 =$$
$$= x_1 \bar{x}_3$$

ülesanne:

Leia **Karnaugh' kaardi** abil veelkord needsamad jääkfunktsioonid $f(x_1\, 0\, x_3 x_4)$ ja $f(x_1\, 1\, x_3 x_4)$ samale 4-muutuja funktsioonile :

$$f = x_1 x_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_4 \vee x_1 \bar{x}_2$$

. . . kus asuvad *Karnaugh' Kaardil* **jääkfunktsioonide** tõeväärtustabelid ?



jääkfunktsiooni $f(x_1\, 1\, x_3 x_4)$ **tõeväärtustabel asub kaardipiirkonnas** $x_2 = 1$

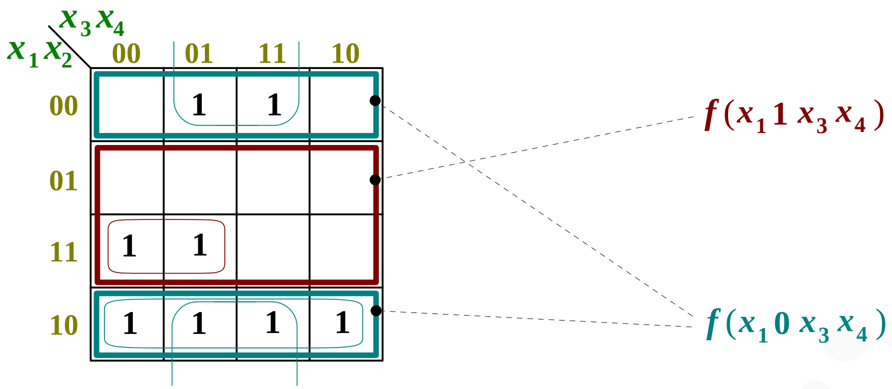
jääkfunktsiooni $f(x_1\, 0\, x_3 x_4)$ **tõeväärtustabel asub kaardipiirkonnas** $x_2 = 0$

kanname selle DNK-avaldise

$$f = x_1 x_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_4 \vee x_1 \bar{x}_2$$

. . . . **tõeväärtustabeli** 4-muutuja kaardile :

$x_1 x_2 \backslash x_3 x_4$	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				



jääkfunktsiooni $f(x_1\,1\,x_3\,x_4)$ **tõeväärtustabel asub kaardipiirkonnas** $x_2 = 1$

jääkfunktsiooni $f(x_1\,0\,x_3\,x_4)$ **tõeväärtustabel asub kaardipiirkonnas** $x_2 = 0$

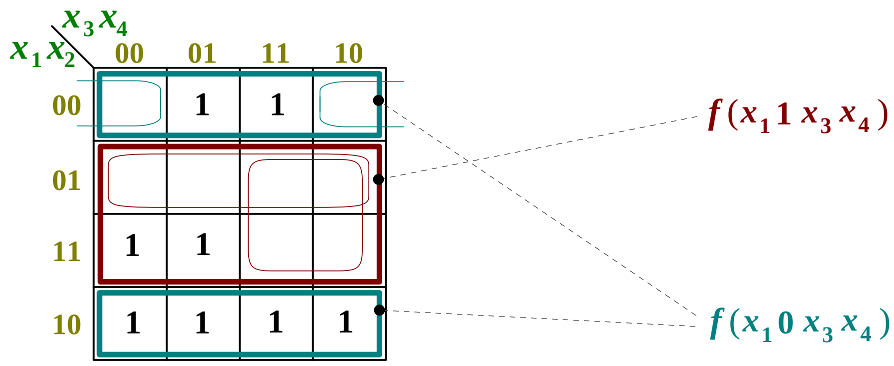
$$f(x_1\,1\,x_3\,x_4) \;=\; x_1\overline{x_3}$$

$$f(x_1\,0\,x_3\,x_4) \;=\; x_1 \vee x_4$$

. . . *lahendatud* : **jääkfunktsioonid** *Karnaugh' kaardilt* väljakirjutatud . . .

. . . siin on *jääkfunktsioonid* välja kirjutatud "*ühtede kontuuride*" kaudu ehk MDNK-dena.
Kas *jääkfunktsioone* saab kaardilt välja kirjutada ka "*nullide kontuuride*" kaudu ehk MKNK-dena ?

jah saab :
seljuhul oleks *jääkfunktsioonid* MKNK-avaldistena välja kirjutatavad siin kaardil sellistest **0**-de kontuuridest :



jääkfunktsioonide MKNK-na leidmise kontuurid (0-de kontuurid)

$$f(x_1\,0\,x_3\,x_4) \;=\; (x_1 \vee x_4) \;=\; x_1 \vee x_4$$

$$f(x_1\,1\,x_3\,x_4) \;=\; (x_1)(\overline{x_3}) \;=\; x_1\overline{x_3}$$

. . . juhtumisi tekkivad siin *jääkfunktsioonideks* sellised avaldised, mis on samaaegselt nii DNK kui ka KNK.

(*n*–1)jääkfunktsioon **(*n*–2)jääkfunktsioon** **. . .**

Kui *n*-muutuja funktsiooni **ü k s** muutuja asendatakse / väärtustatakse konstandiks **0 | 1** (nagu toimus eelnevalt) — siis saame "(***n*–1**)*jääkfunktsiooni*".
. . . nimetus viitab faktile, et muutujate arv väheneb ü h e v õ r r a . . .

Konstandiks väärtustada on võimalik ka m i t u muutujat korraga:
Kui mingi funktsiooni **k a k s** muutujat väärtustatakse konstantideks **0 | 1** , siis saame "(***n*–2**)*jääkfunktsiooni*".
. . . nimetus viitab faktile, et muutujate arv väheneb k a h e v õ r r a . . .

"(***n*–2**)*jääkfunktsioon*" on vaadeldav kui "*jääkfunktsiooni jääkfunktsioon*".

Regulaarselt jätkates — võimalik on väärtustada / asendada konstantideks ka rohkem muutujaid — misjuhul saame "(**n**–**3**)*jääkfunktsiooni*" jne...

Lihtnimetus "*jääkfunktsioon*" viitab enamasti (**n**–**1**)*jääkfunktsioonile*, kuid ka mistahes muud (**n**–**m**)*jääkfunktsiooni* võib nimetada lihtsalt "*jääkfunktsiooniks*".

ülesanne:

Leia DNK-avaldistena (*n*–2)jääkfunktsioonid

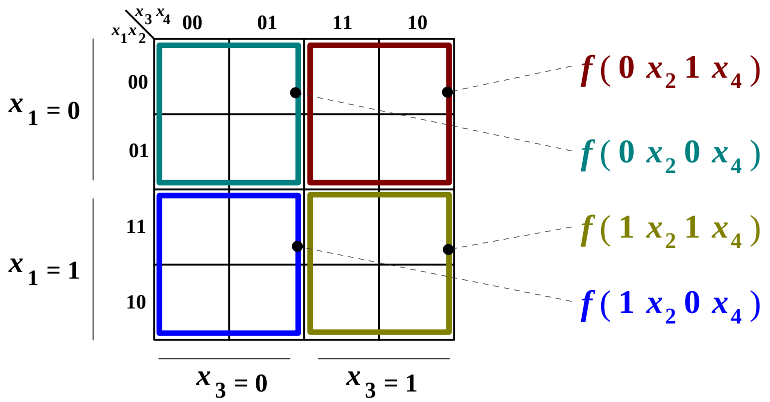
$f(0\,x_2\,0\,x_4)$ $f(0\,x_2\,1\,x_4)$ $f(1\,x_2\,0\,x_4)$ $f(1\,x_2\,1\,x_4)$

t õ e v ä ä r t u s t a b e l i n a etteantud 4-muutuja funktsioonile :

$x_1x_2 \backslash x_3x_4$	00	01	11	10
00	0	1	0	0
01	1	0	1	1
11	0	0	0	0
10	1	0	0	0

Küsitud 4 *jääkfunktsiooni* saab väljakirjutada kaardipiirkondadest

x_1 $\overline{x}_1$ x_3 $\overline{x}_3$ mis kattuvad omavahel :



(n—2)jääkfunktsioonid $f(x_1x_2x_3x_4)$ jaoks kus x_1 ja x_3 on :

$x_1x_3 = 0\,0$ $x_1x_3 = 0\,1$ $x_1x_3 = 1\,0$ $x_1x_3 = 1\,1$

Kaardil näeme, et x_1 mõlemad väärtuspiirkonnad ja x_3 mõlemad väärtuspiirkonnad osalevad nende (*n*–2)*jääkfunktsioonide* väljakirjutamisel.

$x_1x_2 \backslash x_3x_4$	00	01	11	10
00	0	1	0	0
01	1	0	1	1
11	0	0	0	0
10	1	0	0	0

$f(0\,x_2\,1\,x_4) = x_2$

$f(0\,x_2\,0\,x_4) = x_2\overline{x}_4 \vee \overline{x}_2x_4$

$f(1\,x_2\,1\,x_4) = 0$

$f(1\,x_2\,0\,x_4) = \overline{x}_2\overline{x}_4$

(n—2)jääkfunktsioonid DNK-avaldistena

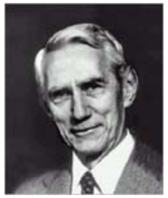
Jääkfunktsioon leiab kasutamist loogikaavaldiste mitmes erikujus.

jääkfunktsiooni kaudu esitatavad loogikafunktsioonide / avaldiste erikujud :

Shannoni arendused

loogikafunktsiooni tuletis

SHANNONI ARENDUSED



Claude Elwood **Shannon** (1916 — 2001)

Shannoni arendus on (*jääkfunktsioone* sisaldav) loogikaavaldise üks erikuju. Lihtsaim arendusjuhtum on **disjunktiivne** arendus **1-he muutuja** järgi.

ülesanne:

Teha Shannoni **disjunktiivne arendus** muutuja x_2 järgi eelmise ülesande avaldisele :

$$f = x_1 x_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_4 \vee x_1 \bar{x}_2$$

$$f = \bar{x}_2 \cdot f(\qquad) \vee x_2 \cdot f(\qquad)$$

$$f = \bar{x}_2 \cdot f(x_1\, 0\, x_3\, x_4) \vee x_2 \cdot f(x_1\, 1\, x_3\, x_4) = \dots$$

. . . **need** *jääkfunktsioonid* oleme just eelnevalt ju leidnud . . .

$$f = \bar{x}_2(x_1 \cdot 0 \cdot \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 \cdot 1 \cdot x_4 \vee x_1 \cdot 1) \vee x_2(x_1 \cdot 1 \cdot \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 \cdot 0 \cdot x_4 \vee x_1 \cdot 0) =$$

$$= \bar{x}_2(\bar{x}_1 x_4 \vee x_1) \vee x_2(x_1 \bar{x}_3) =$$

$$= \bar{x}_2(x_4 \vee x_1) \vee x_2(x_1 \bar{x}_3)$$

. . . . a r e n d u s e a v a l d i s l e i t u d

pane tähele : **sellele** avaldisele leidub ka lihtsam / kiirem arenduse leidmisvõimalus :

$$f = x_1 x_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_4 \vee x_1 \bar{x}_2 = \dots$$

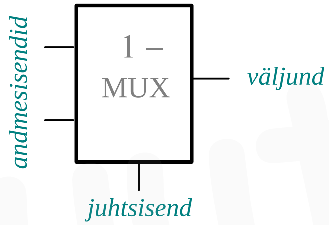
arenduse aluseks olev muutuja x_2 juhtub siin ($\bar{x}_2$ näol) olema *ühine tegur* ja teda saab seega tuua sulgude ette — misjuhul avaldis omandab kah (x_2 järgi) *disjunktiivse arenduse* üldkuju :

$$\dots = x_1 x_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_2(\bar{x}_1 x_4 \vee x_1)$$

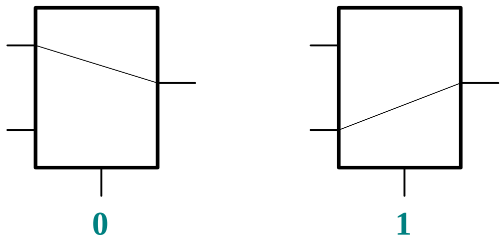
$$= x_2(x_1 \bar{x}_3) \vee \bar{x}_2(x_4 \vee x_1)$$

milleks *Shannoni disjunktiivne arendus* ?

Loogikafunktsioone saab realiseerida **multipleksoritel** :



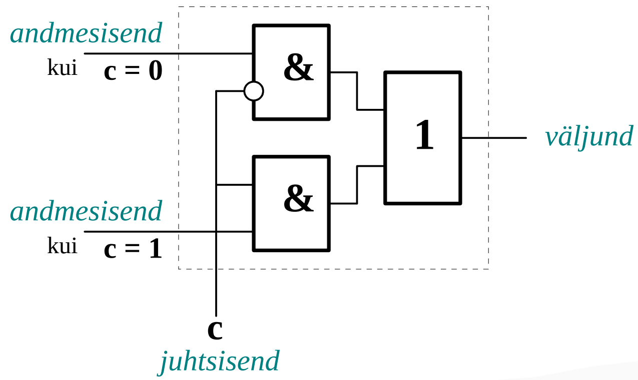
1-multipleksor



1-multipleksori **funktsionaalne mudel**

avaldis $\bar{x}_2(x_4 \vee x_1) \vee x_2(x_1 \bar{x}_3)$ sobib realiseerimiseks **1-MUX** peal.

Multipleksorit j u h i t a k s e selle muutujaga mille järgi on tehtud arendus: (siin: x_2) ja *jääkfunktsioonid* saabuvad andmesisenditele.



1-multipleksori realisatsioon loogikaskeemina

$\bar{x}_2(x_4 \vee x_1) \vee x_2(x_1\bar{x}_3)$

ülesanne:

Teha Shannoni **konjunktiivne arendus** sama muutuja x_2 järgi samale avaldisele :

$$f = x_1x_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_4 \vee x_1\bar{x}_2$$

arendusena saadav avaldis on (eelmise suhtes) **duaalselt vastupidine** :

$$f = [x_2 \vee f(\qquad)][\bar{x}_2 \vee f(\qquad)]$$

$$f = [x_2 \vee f(x_1\,0\,x_3\,x_4)][\bar{x}_2 \vee f(x_1\,1\,x_3\,x_4)] =$$

$$f = (x_2 \vee x_1\cdot 0\cdot\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\cdot 1\cdot x_4 \vee x_1\cdot 1)(\bar{x}_2 \vee x_1\cdot 1\cdot\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\cdot 0\cdot x_4 \vee x_1\cdot 0) =$$

$$= (x_2 \vee \bar{x}_1x_4 \vee x_1)(\bar{x}_2 \vee x_1\bar{x}_3) = (x_2 \vee x_4 \vee x_1)(\bar{x}_2 \vee x_1\bar{x}_3)$$

ülesanne:

2 muutuja järgi **disjunktiivne** arendus:

Teha Shannoni **disjunktiivne arendus** muutujate x_1 ja x_4 järgi avaldisele $[x_1 \to (x_2 \to x_3)]\bar{x}_4$

$$f = \bar{x}_1\bar{x}_4\cdot f(\qquad) \vee \bar{x}_1x_4\cdot f(\qquad) \vee$$
$$\vee\ x_1\bar{x}_4\cdot f(\qquad) \vee x_1x_4\cdot f(\qquad) =$$

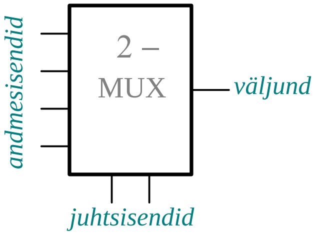
$$= \bar{x}_1\bar{x}_4\cdot f(0\,x_2x_3\,0) \vee \bar{x}_1x_4\cdot f(0\,x_2x_3\,1) \vee$$
$$\vee\ x_1\bar{x}_4\cdot f(1\,x_2x_3\,0) \vee x_1x_4\cdot f(1\,x_2x_3\,1)$$

$$f = [x_1 \to (x_2 \to x_3)]\bar{x}_4 =$$
$$= \bar{x}_1\bar{x}_4\cdot(\qquad) \vee \bar{x}_1x_4\cdot(\qquad) \vee$$
$$\vee\ x_1\bar{x}_4\cdot(\qquad) \vee x_1x_4\cdot(\qquad) =$$

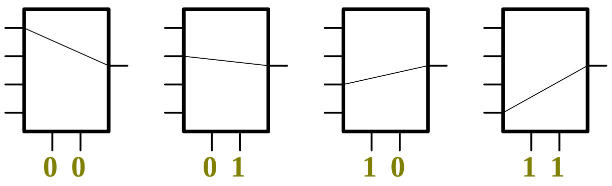
$$= \bar{x}_1\bar{x}_4\cdot(1) \vee \bar{x}_1x_4\cdot(0) \vee x_1\bar{x}_4\cdot(x_2 \to x_3) \vee x_1x_4\cdot(0)$$

milleks *Shannoni disjunktiivne arendus* **2 muutuja** järgi ?

$\bar{x}_1\bar{x}_4\cdot(1) \vee \bar{x}_1x_4\cdot(0) \vee x_1\bar{x}_4\cdot(x_2 \to x_3) \vee x_1x_4\cdot(0)$



2-multipleksor



2-multipleksori funktsionaalne mudel

ülesanne:

2 muutuja järgi **konjunktiivne** arendus:

Teha Shannoni **konjunktiivne arendus** muutujate x_2 ja x_3 järgi samale avaldisele $[x_1 \to (x_2 \to x_3)]\,\overline{x}_4$

arendusena saadav avaldis on **duaalselt vastupidine** :

$$f = [\,x_2 \vee x_3 \vee f(\qquad)\,]\cdot[\,x_2 \vee \overline{x}_3 \vee f(\qquad)\,]\cdot$$
$$\cdot[\,\overline{x}_2 \vee x_3 \vee f(\qquad)\,]\cdot[\,\overline{x}_2 \vee \overline{x}_3 \vee f(\qquad)\,] =$$

$$= [\,x_2 \vee x_3 \vee f(x_1\,0\,0\,x_4)\,]\cdot[\,x_2 \vee \overline{x}_3 \vee f(x_1\,0\,1\,x_4)\,]\cdot$$
$$\cdot[\,\overline{x}_2 \vee x_3 \vee f(x_1\,1\,0\,x_4)\,]\cdot[\,\overline{x}_2 \vee \overline{x}_3 \vee f(x_1\,1\,1\,x_4)\,]$$

$$f = [x_1 \to (x_2 \to x_3)]\,\overline{x}_4 =$$

$$= [\,x_2 \vee x_3 \vee \qquad]\cdot[\,x_2 \vee \overline{x}_3 \vee \qquad]\cdot$$
$$\cdot[\,\overline{x}_2 \vee x_3 \vee \qquad]\cdot[\,\overline{x}_2 \vee \overline{x}_3 \vee \qquad] =$$

$$(x_2 \vee x_3 \vee \overline{x}_4)(x_2 \vee \overline{x}_3 \vee \overline{x}_4)(\overline{x}_2 \vee x_3 \vee \overline{x}_1\overline{x}_4)(\overline{x}_2 \vee \overline{x}_3 \vee \overline{x}_4)$$

iseseisvaks lahendamiseks:

3 muutuja järgi **disjunktiivne** arendus:

Teha Shannoni **disjunktiivne arendus** muutujate x_1 x_3 x_4 järgi avaldisele $[x_1 \to (x_2 \to x_3)]\,\overline{x}_4$

$$f = \overline{x}_1\overline{x}_3\overline{x}_4 \cdot f(0\,x_2\,0\,0) \;\vee\; \overline{x}_1\overline{x}_3 x_4 \cdot f(0\,x_2\,0\,1) \;\vee$$
$$\vee \;\ldots\ldots\; \vee\; x_1 x_3 \overline{x}_4 \cdot f(1\,x_2\,1\,0) \;\vee\; x_1 x_3 x_4 \cdot f(1\,x_2\,1\,1) =$$
$$= \;\ldots\ldots$$

jääkfunktsioonideks saavad tulla: x_2 *või* $\overline{x}_2$ *või* **0** *või* **1**

Shannoni arendus samaaegselt **kõikide** muutujate järgi on **täielik** arendus. Täieliku arenduse *jääkfunktsioonideks* saavad jääda ainult *konstandid* (**0** **1**)

4-muutuja funktsiooni *täieliku disjunktiivse arenduse* **üldkuju** :

$$f = \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3\overline{x}_4 \cdot f(0\,0\,0\,0) \;\vee\; \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3 x_4 \cdot f(0\,0\,0\,1) \;\vee$$
$$\vee \;\ldots\ldots\; \vee\; x_1 x_2 x_3 \overline{x}_4 \cdot f(1\,1\,1\,0) \;\vee\; x_1 x_2 x_3 x_4 \cdot f(1\,1\,1\,1)$$

Täielik **disjunktiivne** arendus annab **TDNK**

Täielik **konjunktiivne** arendus annab **TKNK**

Loogikafunktsiooni TULETIS

n-muutuja funktsiooni $f(x_1 \ldots . x_n)$ **tuletis** selle funktsiooni mingi muutuja x_i järgi

$$\frac{\delta\, f\,(x_1 \,....\, x_n)}{\delta\, x_i}$$

on *jääkfunktsioonide* *summa mooduliga 2* avaldis kujul:

$$\frac{\delta\, f\,(x_1 \,....\, x_n)}{\delta\, x_i} = f\,(x_1 \,..\, x_{i-1}\; \mathbf{0}\; x_{i+1} \,..\, x_n) \;\oplus\; f\,(x_1 \,..\, x_{i-1}\; \mathbf{1}\; x_{i+1} \,..\, x_n)$$

Seega on n-muutuja funktsiooni tuletis (n–1)-muutuja funktsioon, kus puudub see muutuja x_i , mille järgi tuletis võeti:

$$\frac{\delta\, f\,(x_1 \,..\, x_i \,..\, x_n)}{\delta\, x_i} = f\,(x_1 \,..\, x_{i-1}\;\; x_{i+1} \,..\, x_n)$$

ülesanne:

Leida järgneva loogikafunktsiooni **tuletis** muutuja x_3 järgi :

$$f = \bar{x}_2\, \bar{x}_4 \;\vee\; \bar{x}_1\, x_2\, \bar{x}_3$$

Tuletise avaldis teisendada DNK-ks.

$$\frac{\delta\, f\,(x_1\, x_2\, x_3\, x_4)}{\delta\, x_3} = f\,(x_1\, x_2\; \mathbf{0}\; x_4) \;\oplus\; f\,(x_1\, x_2\; \mathbf{1}\; x_4) =$$

$$= (\bar{x}_2\, \bar{x}_4 \;\vee\; \bar{x}_1\, x_2) \;\oplus\; \bar{x}_2\, \bar{x}_4 \;=\; ....$$

meenutame tehte $\oplus$ *asendusseost :* $x_1 \oplus x_2 = \bar{x}_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_2$

$$... = (\overline{\bar{x}_2 \bar{x}_4 \;\vee\; \bar{x}_1\, x_2})\, \bar{x}_2 \bar{x}_4 \;\vee\; (\bar{x}_2\, \bar{x}_4 \;\vee\; \bar{x}_1\, x_2)\, \overline{\bar{x}_2 \bar{x}_4} =$$

$$= \overline{\bar{x}_2 \bar{x}_4}\;\; \overline{\bar{x}_1\, x_2}\;\; \bar{x}_2\, \bar{x}_4 \;\vee\; (\bar{x}_2\, \bar{x}_4 \;\vee\; \bar{x}_1\, x_2)\,(x_2 \;\vee\; x_4) =$$

$$= (x_2 \;\vee\; x_4)(x_1 \;\vee\; \bar{x}_2)\, \bar{x}_2 \bar{x}_4 \;\vee\; \bar{x}_1 x_2 \;\vee\; \bar{x}_1 x_2 x_4 =$$

$$= (x_1 x_2 \;\vee\; x_1 x_4 \;\vee\; \bar{x}_2 x_4)\, \bar{x}_2\, \bar{x}_4 \;\vee\; \bar{x}_1 x_2 =$$

$$= x_1 x_2 \bar{x}_2\, \bar{x}_4 \;\vee\; x_1 x_4 \bar{x}_2\, \bar{x}_4 \;\vee\; \bar{x}_2 x_4 \bar{x}_2\, \bar{x}_4 \;\vee\; \bar{x}_1 x_2 =$$

$$= \bar{x}_1 x_2$$

. . . . või siis teine ja lühem (raskemalt märgatav) teisendustee, jätkates vahepeal tekkinud avaldisekujust edasi nii :

$$... = \overline{\bar{x}_2 \bar{x}_4}\;\; \overline{\bar{x}_1\, x_2}\;\; \bar{x}_2\, \bar{x}_4 \;\vee\; (\bar{x}_2\, \bar{x}_4 \;\vee\; \bar{x}_1\, x_2)\,(x_2 \;\vee\; x_4) =$$

$$= \mathbf{0} \;\vee\; \bar{x}_1 x_2 \;\vee\; \bar{x}_1 x_2 x_4 =$$

$$= \bar{x}_1 x_2$$

saime vaadeldava funktsiooni $f = \bar{x}_2\, \bar{x}_4 \;\vee\; \bar{x}_1\, x_2\, \bar{x}_3$ *jaoks tema tuletise muutuja* x_3 *järgi :*

$$\frac{\delta\, f}{\delta\, x_3} = \bar{x}_1 x_2$$

tuletiseks olev loogikafunktsioon on muutujatega $x_1\, x_2\, x_4$:

$$\frac{\delta f(x_1 x_2 x_3 x_4)}{\delta x_3} = f(x_1 x_2 x_4)$$

. . . . millest omakorda x_4 osutus *mitteoluliseks* muutujaks

millist infot annab **loogikafunktsiooni tuletis** ?

. . . . saame teada, millal x_i väärtuse muutmine muudab ka f väärtust :

ehk millised peavad olema (näiteks) x_1 ja x_2 ja x_4 väärtused, selleks et x_3 väärtuse muutumine **0** / **1** muudaks ka f väärtust :

kui tuletisfunktsioon saab väärtuse **1** mingite konkr. muutujaväärtuste $x_1 .. x_{i-1}\ x_{i+1} .. x_n$ korral :

$$f_{tuletis} = \frac{\delta f_{algne}}{\delta x_i} = 1 = f_{tuletis}$$

. . . . siis omistades needsamad väärtused $x_1 .. x_{i-1}\ x_{i+1} .. x_n$ "algse" funktsiooni f samadele muutujatele, hakkab f väärtus kaasa inverteeruma tema muutuja x_i väärtuse inverteerimisel

ehk funktsiooni f väärtus (nende konkreetsete $x_1 .. x_{i-1}\ x_{i+1} .. x_n$ väärtuste korral) saab olema "tundlik" x_i väärtuse igale muutumisele

$$\frac{\delta f(x_1 x_2 x_3 x_4)}{\delta x_3} = f(x_1 x_2 x_4) = 1 \quad ?$$

näide:

eelnevalt saime:

$$\frac{\delta f}{\delta x_3} = \overline{x}_1 x_2$$

sellise avaldisega tuletisfunktsioon $f(x_1 x_2 x_4)$ väärtustub **1**-ks argumentvektorite

x_1	x_2	x_4
0	**1**	—

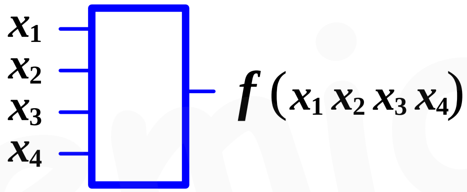
. . . . korral ehk selle tuletise **1**-de piirkonnaks on argumentvektorid :

0 1 0

0 1 1

algne f *oli :* $f(x_1 x_2 x_3 x_4) = \overline{x}_2 \overline{x}_4 \lor \overline{x}_1 x_2 \overline{x}_3$

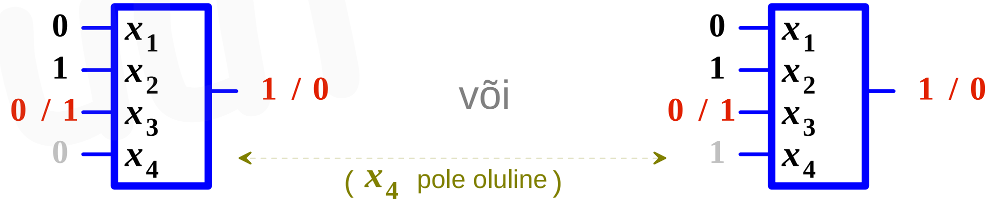
kui algne funktsioon $f(x_1 x_2 x_3 x_4)$ realiseerida *digitaalseadmena* :



. . . . siis rakendades sisenditele saabuvad väärtused (digitaalsignaalid) :

$x_1 = 0$
$x_2 = 1$
$x_4 = 0$ või 1 (ükskõik kumb)

. . . . hakkab seadme **väljundi** väärtus muutuma **sisend**signaali x_3 väärtuse igal muutumisel :



vaatame milleks lihtsustub algse $f(x_1 x_2 x_3 x_4)$ avaldis

$$\overline{x}_2 \overline{x}_4 \lor \overline{x}_1 x_2 \overline{x}_3$$

kui : $x_1 = 0$

$x_2 = 1$

. . . . siis jääb : $f = \overline{x}_3$

ülesanne:

Leida sama loogikafunktsiooni **tuletis** muutuja x_2 järgi :

$$f = \overline{x}_2\,\overline{x}_4 \;\vee\; \overline{x}_1\,\overline{x}_2\,\overline{x}_3$$

Tuletise avaldis teisendada DNK-ks.

$$\frac{\delta\, f\,(x_1\, x_2\, x_3\, x_4)}{\delta\, x_2} = f\,(x_1\, 0\, x_3\, x_4) \oplus f\,(x_1\, 1\, x_3\, x_4) =$$

$$= \overline{x}_4 \oplus \overline{x}_1\,\overline{x}_3 = \;. . . .$$

jälle kasutame tehte $\oplus$ *asendusseost :* $x_1 \oplus x_2 = \overline{x}_1 x_2 \vee x_1 \overline{x}_2$

$$. . . . = \overline{\overline{x}_4}\;\overline{x}_1\,\overline{x}_3 \;\vee\; \overline{x}_4\;\overline{\overline{x}_1\,\overline{x}_3} =$$

$$= x_4\,\overline{x}_1\,\overline{x}_3 \;\vee\; \overline{x}_4\,(x_1 \vee x_3) =$$

$$= \overline{x}_1\,\overline{x}_3\,x_4 \;\vee\; x_1\,\overline{x}_4 \;\vee\; x_3\,\overline{x}_4$$

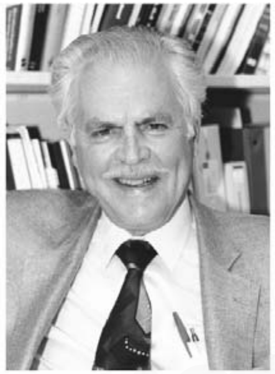
tekkis DNK mida ei saa enam teisendada lihtsamaks DNK-ks, seega ongi valmis

saime vaadeldava funktsiooni $f = \overline{x}_2\,\overline{x}_4 \vee \overline{x}_1\,\overline{x}_2\,\overline{x}_3$ *jaoks*

tema tuletise muutuja x_2 *järgi :*

$$\frac{\delta f}{\delta x_2} = \overline{x}_1\,\overline{x}_3\,x_4 \;\vee\; x_1\,\overline{x}_4 \;\vee\; x_3\,\overline{x}_4 = f\,(x_1\, x_3\, x_4)$$

Reed - Mulleri POLÜNOOM



Zhegalkin I. I. (1869 — 1947)

Irving S. Reed (1923 — 2012)

David E. Muller (1924 — 2008)

nimetatud ka : " **Zhegalkini polünoom** "

. . . . ainus nn. **p o l ü n o o m a v a l d i s** loogikaavaldiste hulgas . . . .

Loogikaavaldise erikuju, mis võib sisaldada ainult neid <u>kahte loogikatehet</u> ja konstanti **1** :

summa mooduliga 2 : $\oplus$

konjunktsioon : **&** $\wedge$

konstant 1 : **1**

. . . . ja kus **sulud** on lahtikorrutatud (ehk sulge enam pole)

Reed-Mulleri polünoom on seega (sulgudeta) loogikaavaldis süsteemis

$$\{\ \&\ \ \oplus\ \ 1\ \}$$