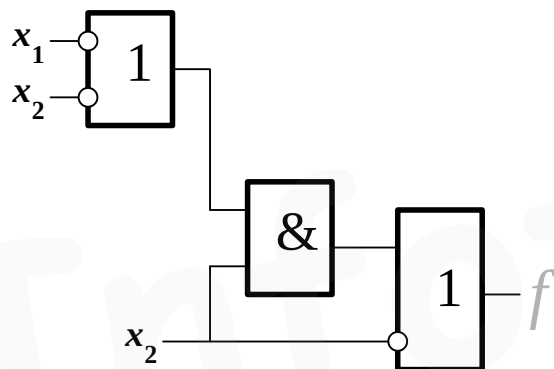


ülesanne:



Leida antud loogikaskeemiga **samaväärne lihtsaim** skeem



skeemile vastav loogikaavaldis: $(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2) x_2 \vee \bar{x}_2$

avaldise lihtsustamine loogikaalgebra põhiseoste abil:

$$(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2) x_2 \vee \bar{x}_2 =$$

$$= \bar{x}_1 x_2 \vee \bar{x}_2 x_2 \vee \bar{x}_2 =$$

$$= \bar{x}_1 x_2 \vee \bar{x}_2 =$$

$$= \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 =$$

$$= \overline{x_1 x_2}$$

esialgse etteantud loogikaskeemiga **samaväärne lihtsaim skeem** on seega:



... lahendatud



? ... leidub ka teine, veidi lühemgi teisendusvõimalus samale avaldisele :

juba esialgne avaldis osutub olema **neeldumisseaduse** $x \vee \bar{x}y = x \vee y$ erijuhtum, mis võimaldab (sulgude lahtikorrumise asemel)

kohe teostada neeldumise :

$$(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2) x_2 \vee \bar{x}_2 = (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2) \vee \bar{x}_2 =$$

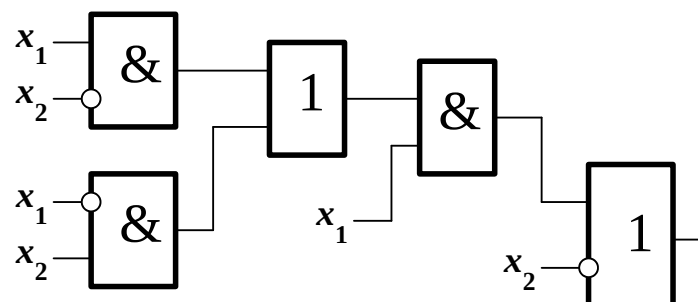
$$= \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_2 =$$

$$= \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 = \overline{x_1 x_2}$$

ülesanne:



Leida antud loogikaskeemiga **samaväärne lihtsaim** skeem





skeemile vastav loogikaavaldis: $(x_1 \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 x_2) x_1 \vee \bar{x}_2$
avaldise lihtsustamine:

$$\begin{aligned} & x_1(x_1 \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 x_2) \vee \bar{x}_2 = \\ & = x_1 x_1 \bar{x}_2 \vee x_1 \bar{x}_1 x_2 \vee \bar{x}_2 = \\ & = x_1 \bar{x}_2 \vee \bar{x}_2 = \\ & = \bar{x}_2 \end{aligned}$$

.... samaväärne lihtsaim loogikaskeem on seega:



Kuna väiksemahuliste loogikaskeemide optimeerimine / minimeerimine
taandub vastava **loogikaavaldise** lihtsustamiseks, siis keskendume
järgnevalt just avaldise lihtsustamisele (vastavat digitaalskeemi igakord
vaatlemata)

ülesanne: _____



Lihtsusta avaldised (loogikaalgebra põhiseoste abil):

$$\bar{x}_1 x_2 \vee x_1 x_2 \vee \bar{x}_2 = \dots$$



$$\begin{aligned} \dots & = x_2(\bar{x}_1 \vee x_1) \vee \bar{x}_2 = \\ & = x_2 \vee \bar{x}_2 = \end{aligned}$$

$$= 1$$



$$(x_1 \vee \bar{x}_2)(\bar{x}_1 \vee x_2) \vee x_1 \bar{x}_2 = \dots$$



juhindudes *distributiivsusseadusest* $x(y \vee z) = xy \vee xz$
.... loeme x rollis olevaks kogu esimese sulgavaldise $(x_1 \vee \bar{x}_2)$ ja
korrutame "esimeste sulgudega" "teised sulud" lahti:

$$\begin{aligned} & (x_1 \vee \bar{x}_2)(\bar{x}_1 \vee x_2) \vee x_1 \bar{x}_2 = \\ & = (x_1 \vee \bar{x}_2)\bar{x}_1 \vee (x_1 \vee \bar{x}_2)x_2 \vee x_1 \bar{x}_2 \\ \dots & = x_1 \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_1 \vee x_1 x_2 \vee \bar{x}_2 x_2 \vee x_1 \bar{x}_2 = \\ & = \bar{x}_2 \bar{x}_1 \vee x_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_2 = \dots \end{aligned}$$

! tüüpiline viga: _____



Kuigi $\bar{x} \vee x = 1$ ei järeldu sellest, et $\bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee x_1 x_2$
võrduks samuti konstandiga 1

Seosest $\bar{x} \vee x = 1$ tuleneb: $\overline{\bar{x}_1 x_2 \vee x_1 x_2} = 1$

kuid $\bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee x_1 x_2 \neq 1$

võime kontrollida: $\bar{x}_1 \bar{x}_2 \neq \overline{x_1 x_2}$

$\bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee x_1 x_2$ on juba lihtsaim avaldise fragment

pane tähele: samal põhjusel $\bar{x}_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_2 \neq 1$



meenutame, et eelpool ühes ülesandes tekkis vahetulemusena avaldis:

$$\dots = x_1(\bar{x}_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_2) \vee \bar{x}_2 = \dots$$

$$\begin{aligned}
 \dots &= \bar{x}_2 \bar{x}_1 \vee x_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_2 = \\
 &= \bar{x}_2 \bar{x}_1 \vee x_1 (x_2 \vee \bar{x}_2) = \\
 &= \bar{x}_2 \bar{x}_1 \vee x_1 = \\
 &= \bar{x}_2 \vee x_1
 \end{aligned}$$

Pikkade inversioonide olemus avaldistes

pikk inversioon avaldise mingi osa kohal on samaväärne **sulgudega** selle avaldiseosa ümber:

$$\overline{x_1 x_2 x_3} \equiv (\overline{x_1 x_2}) x_3$$

(Rõhutame, et vastupidine väide ei kehti ehk **sulgude olemasolust** ei järeldu mitte midagi *inversiooni* kohta.)

Lisaks järeldub eelnevast, et avaldise $\overline{x_1 x_2 x_3}$ teisendamisel

DeMorgani seadusega tuleb pika inversiooni ära kadumisel avaldisest kohe panna sulud, et avaldises säiliks tehete õige järjekord:

$$\overline{x_1 x_2 x_3} = (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2) x_3$$

iseseisvaks lahendamiseks:

Lihtsusta loogikaavaldis *loogikaalgebra põhiseoste* abil



$$\bar{x}_2 (x_1 \vee \bar{x}_2) (x_2 \vee x_3) \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 = \dots$$

vastus:

$$\dots = \bar{x}_2 x_3$$

ülesanne:

Lihtsusta loogikaavaldised (*loogikaalgebra põhiseoste* abil)



$$[x_1 \vee (x_1 \vee x_3) x_1 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 x_4] \bar{x}_1 = \dots$$



$$\begin{aligned}
 \dots &= [x_1 \vee x_1 x_1 \vee x_3 x_1 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 x_4] \bar{x}_1 = \\
 &= [x_1 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 x_4] \bar{x}_1 = \\
 &= x_1 \bar{x}_1 = \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

.... lahendatud: osutus konstandiks 0



?... või siis oleks võinud ka nurksulud **lahti korrutada** $\bar{x}_1$ -ga (misjuhu **neeldumisi** poleks toimunudki):

$$\begin{aligned}
 \dots &= [x_1 \vee x_1 x_1 \vee x_3 x_1 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 x_4] \bar{x}_1 = \\
 &= x_1 \bar{x}_1 \vee x_1 x_1 \bar{x}_1 \vee x_3 x_1 \bar{x}_1 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 x_4 \bar{x}_1 = \\
 &= 0 \vee 0 \vee 0 \vee 0 = 0
 \end{aligned}$$



$$(\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee x_3 x_4 \vee \bar{x}_1 x_3) (x_1 \vee x_4) (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_4) = \dots$$



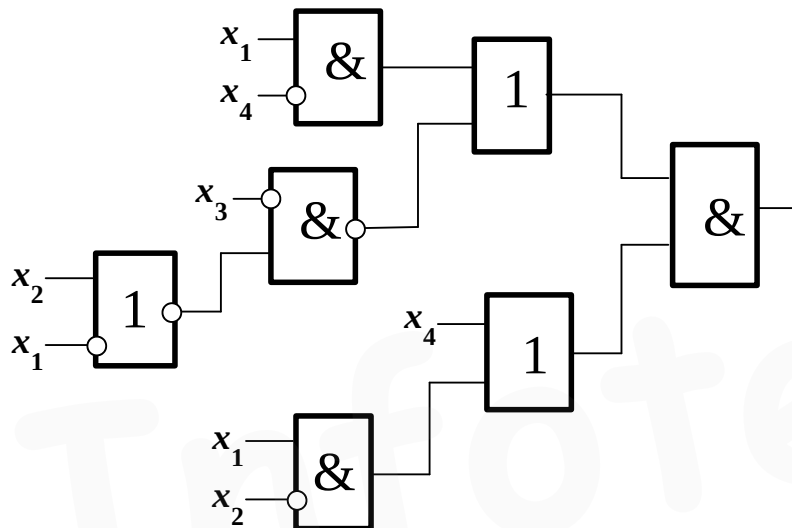
$$\begin{aligned}
 &= (\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee x_3 x_4 \vee \bar{x}_1 x_3) (x_1 \bar{x}_1 \vee x_4 \bar{x}_1 \vee x_1 \bar{x}_4 \vee x_4 \bar{x}_4) = \\
 &= (\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee x_3 x_4 \vee \bar{x}_1 x_3) (x_4 \bar{x}_1 \vee x_1 \bar{x}_4) = \\
 &= \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 x_4 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 x_1 \vee x_3 x_4 \bar{x}_1 \vee x_3 x_4 x_1 \bar{x}_4 \vee \\
 &\quad \vee \bar{x}_1 x_3 x_4 \vee \bar{x}_1 x_3 x_1 \bar{x}_4 =
 \end{aligned}$$

$$= \bar{x}_1 x_3 x_4 \vee \bar{x}_1 x_3 x_4 =$$

$$= \bar{x}_1 x_3 x_4$$



Leida antud loogikaskeemiga **samaväärne lihtsaim** skeem
(loogikaelementide **vähima sisendite koguarvuga** skeem)



skeemile vastav loogikaavaldis:

$$[x_1 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_3 (x_2 \vee \bar{x}_1)] (x_1 \bar{x}_2 \vee x_4) = \dots$$

$$\begin{aligned} \dots &= [x_1 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_3 \vee (x_2 \vee \bar{x}_1)] (x_1 \bar{x}_2 \vee x_4) = \\ &= [x_1 \bar{x}_4 \vee x_3 \vee x_2 \vee \bar{x}_1] (x_1 \bar{x}_2 \vee x_4) = \end{aligned}$$

$$= x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_4 \vee x_1 \bar{x}_4 x_4 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee x_3 x_4 \vee x_1 \bar{x}_2 x_2 \vee x_2 x_4 \vee \bar{x}_1 x_1 \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 x_4 =$$

$$= x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_4 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee x_3 x_4 \vee x_2 x_4 \vee \bar{x}_1 x_4 = \dots$$

tekkinud avaldis on piisavalt keeruline, misjuhul tuleb proovida teda edasi lihtsustada kõigi võtetega, millega üldse saab **konjunktsioonide disjunktsiooni** (ehk **Disjunkttiivset Normaalkuju : DNK**) edasi lihtsustada

(nendeks on 4 võtet):

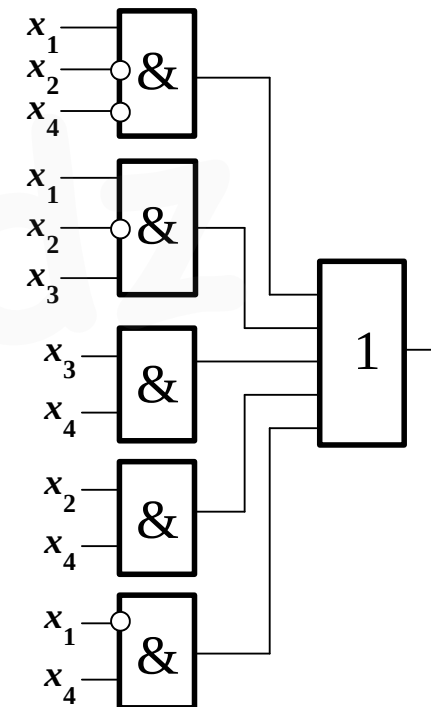
otsime neeldumist: $x \vee xy$

otsime neeldumist: $x \vee \bar{x}y$

otsime ühise teguri sulgude ette toomise võimalust: $z(x \vee \bar{x})$

otsime ühise teguri sulgude ette toomise võimalust: $z(x \vee \bar{x}y)$

Tekkinud avaldises ei õnnestu rakendada nendest neljast lihtsustusvõttest mitte ühtegi. Seega ei saa tekkinud avaldist enam lihtsustada veelgi minimaalsemaks Tekkinud avaldise vahetu skeemrealisatsiooni oleks:



... kuid see skeem pole minimaalseim võimalik !

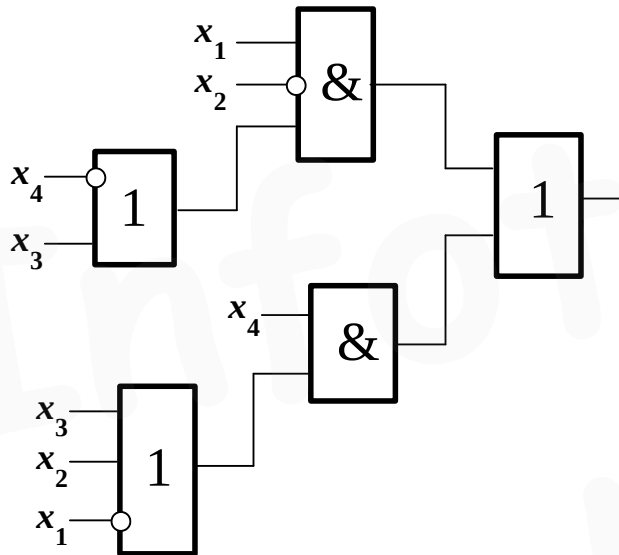
saadud DNK-avaldist :

$$x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_4 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee x_3 x_4 \vee x_2 x_4 \vee \bar{x}_1 x_4$$

... saab teisendada mittenormaalkujuliseks avaldiseks **ühiste tegurite** **sulgude ette toomise** teel, nii et sisendite arv skeemis veelgi väheneb :

$$\begin{aligned} \dots &= x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_4 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee x_3 x_4 \vee x_2 x_4 \vee \bar{x}_1 x_4 = \\ &= x_1 \bar{x}_2 (\bar{x}_4 \vee x_3) \vee x_4 (x_3 \vee x_2 \vee \bar{x}_1) \end{aligned}$$

viimasena saadud loogikaavaldise skeemrealisatsioon on:



optimaalseim skeem, milleni võib jõuda loogikaavaldise lihtsustamise teel

Loogikafunktsiooni normaalkujude leidmine

Disjunkttiivne normaalkuju (DNK) saadakse funktsiooni 1-de piirkonnast.

Konjunkttiivne normaalkuju (KNK) saadakse funktsiooni 0-de piirkonnast.

Kui vaadeldava funktsiooni *tõeväärtustabel* on olemas (ette antud või funktsiooni muust esituskujust välja arvatud), siis teame ka selle funktsiooni 0 / 1-piirkondi, mis ongi DNK või KNK väljakirjutamiseks piisav.

ülesanne:



Kirjuta tõeväärtustabelist välja selle funktsiooni TDNK ja lihtsusta see loogikaalgebra põhiseoste abil MDNK-ks:

$x_1 x_2 x_3$	$f(x_1 x_2 x_3)$
0 0 0	1
0 0 1	0
0 1 0	1
0 1 1	1
1 0 0	0
1 0 1	1
1 1 0	1
1 1 1	1



$$\begin{aligned} f(x_1 x_2 x_3) &= \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee \\ &\vee x_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 x_2 x_3 = \dots \end{aligned}$$

meenutame 4 võtet, millega saab DNK-d edasi lihtsustada :

neeldumine: $x \vee x y$ pole võimalik TDNK korral

neeldumine: $x \vee \bar{x} y$ pole võimalik TDNK korral

ühine tegur sulgude ette : $z(x \vee \bar{x} y)$ pole võimalik TDNK korral

ühine tegur sulgude ette : $z(x \vee \bar{x})$ ainult see on võimalik TDNK korral

$$\begin{aligned} \dots &= \bar{x}_1 \bar{x}_3 (\bar{x}_2 \vee x_2) \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee \\ &\vee x_1 x_2 (\bar{x}_3 \vee x_3) = \\ &= \bar{x}_1 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 = \dots \end{aligned}$$

on tekkinud DNK-avaldis, kus on **erinevate tegurite arvuga** konjunksioonid, misjuhul võib leida võimalus **ühist tegurit sulgude ette tuua** ka nii:

ühine tegur sulgude ette : $z(x \vee \bar{x}y)$

$$\begin{aligned} \dots &= \bar{x}_1(\bar{x}_3 \vee x_2x_3) \vee x_1(\bar{x}_2x_3 \vee x_2) = \\ &= \bar{x}_1(\bar{x}_3 \vee x_2) \vee x_1(x_3 \vee x_2) = \\ &= \bar{x}_1\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_1x_2 = \\ &= \bar{x}_1\bar{x}_3 \vee x_2(\bar{x}_1 \vee x_1) \vee x_1x_3 = \\ &= \bar{x}_1\bar{x}_3 \vee x_2 \vee x_1x_3 \end{aligned}$$

teisendustulemus on MDNK



KARNAUGH' KAARDID

Karnaugh' kaart on funktsiooni tõeväärtustabeli sihipärane topoloogiline ümberpaigutus tasandil või ruumis.

Tõeväärtustabeli igale reale (ehk funktsiooni igale argumentvektorile) vastab kaardil üks ruut.

Maurice Karnaugh

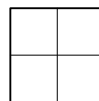
Karnaugh' kaartide topoloogia

2-muutuja Karnaugh' kaart on tabel mõõtmatega 2×2 (või 1×4) ruutu ;

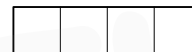
3-muutuja Karnaugh' kaart on tabel mõõtmatega $2 \times 4 = 8$ ruutu ;

4-muutuja Karnaugh' kaart on tabel mõõtmatega $4 \times 4 = 16$ ruutu :

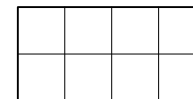
($2^4 = 16$ rida on ka 4-muutuja loogikafunktsiooni tõeväärtustabelis)



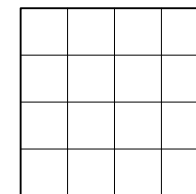
või



2 - muutuja
Karnaugh' kaart



3 - muutuja
Karnaugh' kaart

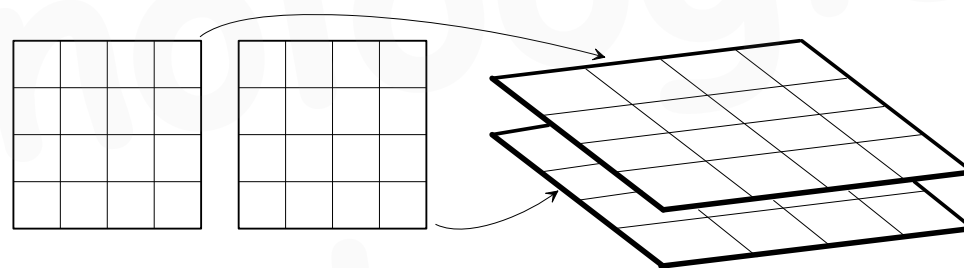


4 - muutuja
Karnaugh' kaart

2-, 3- ja 4-muutuja kaardid on 2-mõõtmelised ehk **tasandilised**.

5- ja 6-muutuja kaardid on 3-mõõtmelised ehk **ruumilised**.

5-muutuja Karnaugh' kaart on tabel mõõtmatega $2 \times 4 \times 4 = 32$ ruutu :
($2^5 = 32$ rida on ka 5-muutuja funktsiooni tõeväärtustabelis)



5 - muutuja Karnaugh' kaart

6-muutuja Karnaugh' kaart on tabel mõõtmatega $4 \times 4 \times 4 = 64$ ruutu :
($2^6 = 64$ rida on ka 6-muutuja funktsiooni tõeväärtustabelis)