

LOOGIKAFUNKTSIOONID (Boole'i funktsioonid)

***n*-muutuja loogikafunktsioon** $f(x_1x_2\dots x_n)$ seab igale *n*-järgulisele kahendvektorile (ehk argumentvektorile) $x_1x_2\dots x_n$ vastavaks loogikaväärtuse 0 või 1.

2-muutuja funktsioon $f(x_1x_2)$ määrab mingi vastavuse:

Loogikafunktsiooni vahetuks esituseks on **tõeväärtustabel**, mis loetleb "kasvavas" järjekorras kõikvõimalikud argumentvektorid (4 või 8 või 16 või 32 jne) rida koos vastava funktsiooniväärtusega 0 / 1:

x_1x_2	$f(x_1x_2)$
0 0	0
0 1	1
1 0	0
1 1	0

mingi suvalise
2-muutuja funktsiooni tõeväärtustabel

2-muutuja loogikafunktsioon osutub matemaatiliseks mudeliks sellisele digitaalseadmele, millel on 2 sisendit ja 1 väljund:



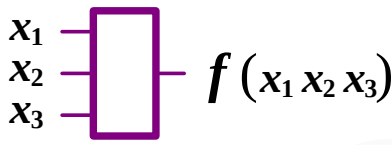
3-muutuja loogikafunktsioon $f(x_1x_2x_3)$ seab igale võimalikule 3-järgulisele 2ndvektorile {000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111} vastavaks loogikaväärtuse 0 või 1
Seega on 3-muutuja loogikafunktsiooni tõeväärtustabel 8-realine.

$x_1x_2x_3$	$f(x_1x_2x_3)$
0 0 0	0
0 0 1	1
0 1 0	0
0 1 1	0
1 0 0	1

1 0 1	0
1 1 0	1
1 1 1	1

mingi 3-muutuja funktsiooni
tõeväärtustabel

3-muutuja loogikafunktsioon osutub matemaatiliseks mudeliks sellisele digitaalseadmele, millel on 3 sisendit ja 1 väljund.



4-muutuja loogikafunktsiooni tõeväärtustabel on 16-realine kuna eksisteerib 16 erinevat võimalikku kahendvektorit.
Funktsiooni muutujate (ehk argumentide) arvu suurenemisel ühevõrra funktsiooni argumentvektorite arv kahekordistub.

Argumentvektor (kahendvektor) $x_1x_2\dots x_n$ on loogikamuutujate "väärtustekomplekt", mis esitab funktsiooni igale üksikule muutujale

$x_1x_2\dots x_n$ omistatavat väärtust 0 või 1.
Loogikamuutujad esitavad funktsioonile vastava digitaalseadme sisendeid.
Muutujate väärtustamisel omandab ka loogikafunktsioon ise väärtuse 0 või 1 ("funktsioon seab argumentvektorile vastavaks loogikaväärtuse 0 või 1")

Kui mingi 3-muutuja funktsioon $f(x_1x_2x_3)$ väärtustub muutujaväärtuste $x_1 = 1 \quad x_2 = 0 \quad x_3 = 1$ korral 0-ks, siis kirjutame: $f(101) = 0$

Funktsiooni tõeväärtuspiirkonnad

Funktsiooni **1-de piirkonna** moodustavad need argumentvektorid $x_1x_2\dots x_n$, mille korral $f(x_1x_2\dots x_n) = 1$
Funktsiooni **0-de piirkonna** moodustavad need argumentvektorid $x_1x_2\dots x_n$, mille korral $f(x_1x_2\dots x_n) = 0$

Osaliselt määratud loogikafunktsioonid

Loogikafunktsioonide korral tähendab *osaline määratus* seda, et osade tema argumentvektorite $x_1 x_2 \dots x_n$ jaoks pole rangelt määratud, kumba loogikaväärtuse **0** või **1** funktsioon nende korral omandama peab.

Sellised argumentvektorid moodustavad funktsiooni **määramatuspiirkonna**. Funktsioon võib omandada *määramatuspiirkonda* kuuluvate argumentvektorite $x_1 x_2 \dots x_n$ korral ükskõik kumba loogikaväärtuse **0** või **1**.

Selle tähistamiseks kirjutatakse *osaliselt määratud* funktsiooni tõeväärtustabelisse *määramatuspiirkonna* argumentvektoritele vastavaks '—'.

Järgnevalt on esitatud mingi suvalise *osaliselt määratud* 3-muutuja loogikafunktsiooni tõeväärtustabel.

Selle funktsiooni määramatuspiirkonna moodustavad 2 argumentvektorit: { **010** **100** }

$x_1 x_2 x_3$	$f(x_1 x_2 x_3)$
0 0 0	0
0 0 1	1
0 1 0	—
0 1 1	0
1 0 0	—
1 0 1	0
1 1 0	1
1 1 1	1

Osaliselt määratud funktsioon f

$x_1 x_2 x_3$	f	f_1	f_2	f_3	f_4
0 0 0	0	0	0	0	0
0 0 1	1	1	1	1	1
0 1 0	—	0	0	1	1
0 1 1	0	0	0	0	0
1 0 0	—	0	1	0	1
1 0 1	0	0	0	0	0
1 1 0	1	1	1	1	1
1 1 1	1	1	1	1	1

Täielikult määratud funktsioonid $f_1 f_2 f_3 f_4$ mis sobivad funktsiooni f esitamiseks (määramused '—' on määratud **1**-deks või **0**-deks)

määramatuspiirkonna tähendus digitaalseadme jaoks:
neid sisendväärtuste komplekte **ei saabu seadme sisenditele ta töötamise ajal mitte kunagi**.
Seega pole oluline, kuidas seade töötaks siis **kui nad saabuksid**

Mida tehakse loogikafunktsiooni määramatuspiirkonnaga ?

Osaliselt määratud funktsioon kuulub "lõpunimääramisele" ehk temalt minnakse üle **täielikult määratud** funktsioonile, jaotades ta määramatuspiirkonna vabalt ära **1**-de ja **0**-de piirkonna vahel. Selle tulemusel saadakse *täielikult määratud* funktsioon, mis sobib vaadeldava osaliselt määratud funktsiooni esitamiseks / esindajaks.

Kui funktsiooni määramatuspiirkonnas on **n** kahendvektorit, siis saab määramatuspiirkonda **1**-de ja **0**-de piirkonna vahel ära jaotada **2ⁿ** erineval viisil.

Eelnevates tõeväärtustabelites on esitatud kõik **2² = 4** *täielikult määratud* funktsiooni

$f_1 f_2 f_3 f_4$

.... mis sobivad vaadeldava *osaliselt määratud* funktsiooni f esitamiseks.

Osaliselt määratud funktsiooni f **1**-de ja **0**-de piirkonnad sisalduvad **tervikuna** kõikide funktsioonide $f_1 f_2 f_3 f_4$ vastavates piirkondades.

Erinevused täielikult määratud funktsioonide $f_1 f_2 f_3 f_4$ **1**-de ja **0**-de piirkondades piirduvad ainult nende argumentvektoritega, mis moodustavad funktsiooni f määramatuspiirkonna.

Seega "käituvad" kõik 4 funktsiooni $f_1 f_2 f_3 f_4$ nii, nagu nõuab funktsiooni f tõeväärtustabel.

Sobivad 4 täielikult määratud funktsiooni saadakse tõeväärtustabeli "kriipsude" määramisega **1**-deks ja **0**-deks kõikides võimalikes kombinatsioonides.

Kuigi osaliselt määratud funktsiooni võib "lõpuni" määrata vabalt, ei tehta seda siiski juhuslikul viisil, vaid teatud tunnuste järgi valitakse sobivate täielikult määratud funktsioonide hulgast eelistatuim.

Loogikafunktsioonide esituskujud

Funktsiooni mistahes esituskujust peab selguma, kuidas funktsioon väärtustub oma muutujate kõikvõimalike väärtuskombinatsioonide korral.

♦ **tõeväärtustabel**

Tõeväärtustabel on loogikafunktsiooni kõige "vahetum" esitus.

Ta loetleb esitatava funktsiooni väärtused tabelisse korrastatuna kõikide argumentdiväärtuste kombinatsioonide (ehk argumentvektorite) korral, alustades argumentvektorst **000.....0** ja lõpetades argumentvektoriga **111.....1**.

Eelpool leiduvad juba näited 2-muutuja funktsiooni ja 3-muutuja funktsiooni tõeväärtustabelitest.

n-muutuja loogikafunktsiooni muutujatele $x_1x_2 \dots x_n$ saab väärtusi **0** ja **1** omistada 2^n erineval viisil. Samapalju peab olema ridu ka tema tõeväärtustabelis. Seega tõeväärtustabeli suurus kasvab muutujate arvu suurenemisel kiiresti (eksponentsiaalses progressioonis) ja on ilmne, et *tõeväärtustabel* sobib ainult väikse muutujatearvuga loogikafunktsiooni esitamiseks.

(Tinglik piir võiks olla kuni 6 muutujat ehk $2^6 = 64$ tabelirida.)

♦ **numbriline kümnesitus**

Numbrilisel kujul 10ndesitus on tõeväärtustabeli kompaktne üherealine esitus, kus 2ndvektorid on asendatud vastavate 10ndarvudega.

Funktsiooni 10ndesitus võib olla antud kas **1**-de või **0**-de piirkonna järgi.

1-de piirkonna järgi esitades kasutatakse suurt kreeka tähte "*sigma*": $\sum$

Eelnev osaliselt määratud näitefunktsioon $f(x_1x_2x_3)$:

$x_1x_2x_3$	$f(x_1x_2x_3)$
0 0 0	0
0 0 1	1
0 1 0	—
0 1 1	0
1 0 0	—
1 0 1	0
1 1 0	1
1 1 1	1

osaliselt määratud funktsioon *f*

.... omab **1**-de piirkonna järgi järgnevat 10ndesitust:

$$f(x_1x_2x_3) = \sum (1, 6, 7)_1 (2, 4) \text{ — ehk}$$

$$f(x_1x_2x_3) = \sum 1, 6, 7 (2, 4) \text{ —}$$

kodutöö isiklik loogikafunktsioon genereerub matr.numbrist just 1-de piirkonna järgi numbriliseks 10ndesituseks

0-de piirkonna järgi esitades kasutatakse suurt kreeka tähte "*pii*": Π

Eelnev osaliselt määratud näitefunktsioon omab **0**-de piirkonna järgi järgnevat 10ndesitust:

$$f(x_1x_2x_3) = \Pi (0, 3, 5)_0 (2, 4) \text{ — ehk}$$

$$f(x_1x_2x_3) = \Pi 0, 3, 5 (2, 4) \text{ —}$$

♦ **loogikaavaldis**

Muutujaid sisaldav suvaline *loogikaavaldis* (oma eelpool defineeritud kujul) on alati vaadeldav loogikafunktsioonina, kuna tema muutujate väärtustamisel omandab ka kogu loogikaavaldis väärtuse **0** või **1**.

Iga *loogikaavaldist* võib pidada / nimetada *loogikafunktsiooniks*;

Iga *loogikafunktsiooni* saab esitada mingi *loogikaavaldisena*;

loogikaavaldis ja **loogikafunktsioon** osutuvad samaväärseteks mõisteteks.

Funktsiooni esitamisel *avaldisena* eelistatakse loogikaavaldiste **normaalkujusid**.

Loogikaavaldiste normaalkujud

Algterm on avaldise koosseisu kuuluv loogikamuutuja x_i või selle inversioon $\bar{x}_i$ või konstant **0** **1**.

Elementaarkonjunktsioon on üksik *algterm* või *algtermide konjunktsioon*. Järgneval real on näitena toodud mingid 5 *elementaarkonjunktsiooni*:

$$x_1\bar{x}_2 \qquad x_2\bar{x}_4\bar{x}_5\bar{x}_1 \qquad \bar{x}_1 \qquad x_3\bar{x}_4x_6 \qquad x_1\bar{x}_3x_6\bar{x}_5x_2$$

Elementaardisjunktsioon on üksik *algterm* või *algtermide disjunktsioon*. Järgneval real on näitena toodud mingid 4 *elementaardisjunktsiooni*:

$$x_1 \vee \bar{x}_2 \qquad x_2 \vee \bar{x}_4 \vee \bar{x}_5 \vee \bar{x}_1 \qquad \bar{x}_1 \qquad x_3 \vee \bar{x}_4 \vee x_6$$

Disjunktiiivne normaalkuju (DNK) on üksik elementaarkonjunktsioon või elementaarkonjunktsioonide disjunkttsioon.

Järgneval kahel real on mõlemal üks DNK :

$$x_1 x_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_4 x_1$$

$$x_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_4 \vee x_1 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_4 x_1 x_3$$

Konjunktiiivne normaalkuju (KNK) on üksik elementaardisjunkttsioon või elementaardisjunkttsioonide konjunktsioon.

Järgneval kahel real on mõlemal üks KNK :

$$(x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2) x_2$$

$$(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_4)$$

Täielikud normaalkujud

Täielik DNK (TDNK) on DNK, kus iga elementaarkonjunktsioon sisaldab funktsiooni **kõiki** muutujaid x_i

Järgneval viiel real on igal real üks **täielik DNK** :

$$\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4$$

$$\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3$$

$$\bar{x}_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_2$$

$$\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4$$

$$x_2$$

Täielik KNK (TKNK) on KNK, kus iga elementaardisjunkttsioon sisaldab funktsiooni **kõiki** muutujaid x_i

Järgneval viiel real on igal real üks **täielik KNK** :

$$(x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3)$$

$$(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4)(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_4)(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4)$$

$$(x_1 \vee x_2)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2)$$

$$\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3$$

$$x_2$$

Loogikaavaldise f keerukus $L(f)$ on tema koosseisus olevate algtermide arv:

$$L[(\bar{x}_1 \vee x_2) \bar{x}_3] = 3$$

$$L(\bar{x}_1 \bar{x}_3 \vee x_2 \bar{x}_3) = 4$$

Igale funktsioonile leidub palju erinevaid loogiliselt võrdväärseid, kuid erineva keerukusega normaalkujusid.

Minimaalne normaalkuju (MDNK MKNK) on konkreetse funktsiooni väikseima keerukusega DNK või KNK.

Funktsiooni *minimaalne normaalkuju* on seega tema paljudest võimalikest normaalkujudest selline, mis sisaldab kõige vähem algterme x_i $\bar{x}_i$

Loogikaavaldist saab teisendada (minimaalsele) *disjunktiiivsele* normaalkujule eelpool esitatud *loogikatehete asendusseoseid* ja *loogikaalgebra põhiseoseid* kasutades.

pane tähele :

eelnevatest teisendusnäidetest nägime, et loogikaavaldiste "käsitsi" teisendused viivad avaldise alati **DNK**-kujule.