

ühine tegur sulgude ette : $z(x \vee \bar{x}y)$

$$\begin{aligned}
 \dots &= \bar{x}_1(\bar{x}_3 \vee x_2x_3) \vee x_1(\bar{x}_2x_3 \vee x_2) = \\
 &= \bar{x}_1(\bar{x}_3 \vee x_2) \vee x_1(x_3 \vee x_2) = \\
 &= \bar{x}_1\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_1x_2 = \\
 &= \bar{x}_1\bar{x}_3 \vee x_2(\bar{x}_1 \vee x_1) \vee x_1x_3 = \\
 &= \bar{x}_1\bar{x}_3 \vee x_2 \vee x_1x_3
 \end{aligned}$$

teisendustulemus on MDNK



KARNAUGH' KAARDID

Karnaugh' kaart on funktsiooni *tõeväärtustabeli* sihipärane *topoloogiline ümberpaigutus* tasandil või ruumis.

Tõeväärtustabeli igale reale (ehk funktsiooni igale argumentvektorile) vastab kaardil üks ruut.

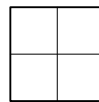
Maurice Karnaugh

Karnaugh' kaartide topoloogia

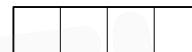
2-muutuja Karnaugh' kaart on tabel mõõtmetega 2×2 (või 1×4) ruutu ;

3-muutuja Karnaugh' kaart on tabel mõõtmetega $2 \times 4 = 8$ ruutu ;

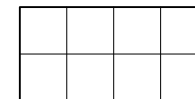
4-muutuja Karnaugh' kaart on tabel mõõtmetega $4 \times 4 = 16$ ruutu :
($2^4 = 16$ rida on ka 4-muutuja loogikafunktsiooni tõeväärtustabelis)



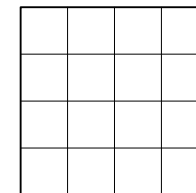
või



2 - muutuja
Karnaugh' kaart



3 - muutuja
Karnaugh' kaart

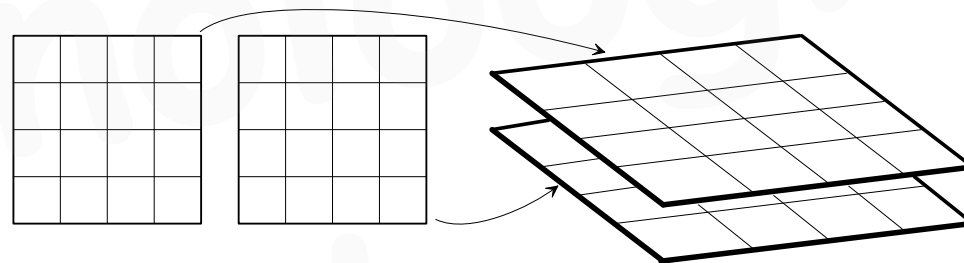


4 - muutuja
Karnaugh' kaart

2-, 3- ja 4-muutuja kaardid on 2-mõõtmelised ehk **tasandilised**.

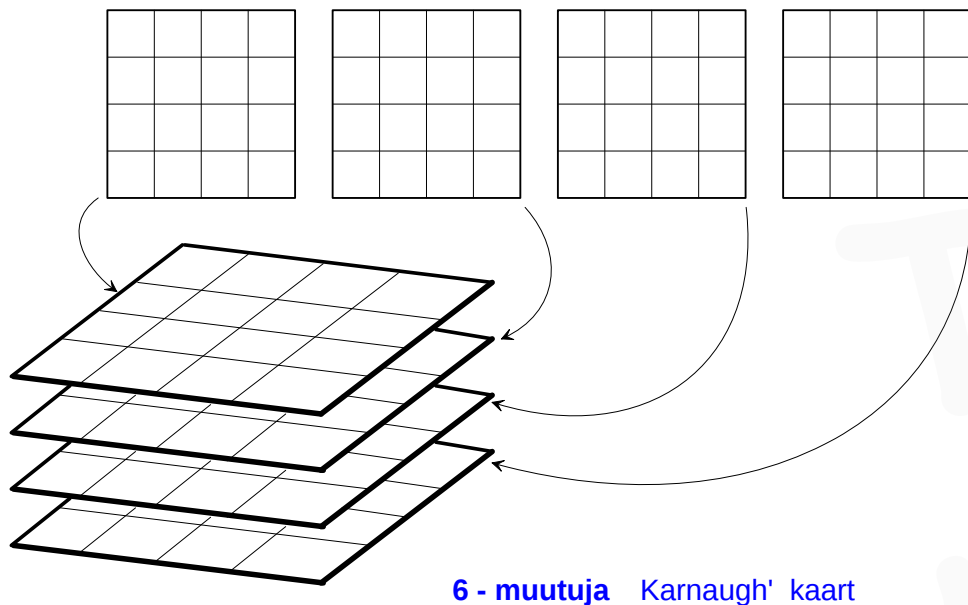
5- ja 6-muutuja kaardid on 3-mõõtmelised ehk **ruumilised**.

5-muutuja Karnaugh' kaart on tabel mõõtmetega $2 \times 4 \times 4 = 32$ ruutu :
($2^5 = 32$ rida on ka 5-muutuja funktsiooni tõeväärtustabelis)



5 - muutuja Karnaugh' kaart

6-muutuja Karnaugh' kaart on tabel mõõtmetega $4 \times 4 \times 4 = 64$ ruutu :
($2^6 = 64$ rida on ka 6-muutuja funktsiooni tõeväärtustabelis)



Karnaugh' kaartide põhiomadused
Karnaugh' kaardil on 2 põhiomadust.

1. põhiomadus

kaardi iga ruudu naaberruutude arv võrdub kaardi muutujate arvuga

Seega:

- 2-muutuja Karnaugh' kaardi igal ruudul on 2 naaberruutu ;
- 3-muutuja Karnaugh' kaardi igal ruudul on 3 naaberruutu ;
- 4-muutuja Karnaugh' kaardi igal ruudul on 4 naaberruutu ;
- 5-muutuja Karnaugh' kaardi igal ruudul on 5 naaberruutu ;
- 6-muutuja Karnaugh' kaardi igal ruudul on 6 naaberruutu ;



? mitu naaberruutu oli eespool erinevate suurustega kaartidel ?

6-muutuja kaart on suurim Karnaugh' kaart.

7-muutuja kaarti ei eksisteeri, sest 3-mõõtmelise ruumi võimalused on 6-muutuja kaardiga ammendatud ehk ruudu 7ndat naabrit pole ruumis enam kuhugi paigutada.

Argumentvektorite paiknemine kaardi ruutudes

Kaardi igale ruudule vastab tõeväärtustabeli üks rida ehk funktsiooni üks **argumentvektor** (milleks on mingi n -järguline 2ndvektor).

2. põhiomadus

suvalise kahe naaberruudu argumentvektorid on teineteise lähiskoodid

(meenutame et, lähiskoodid on kahendvektorid, mis erinevad teineteisest ainult ühes oma kahendjärgus)

x_1	$x_2 x_3$			
	00	01	11	10
0	0 000	1 001	3 011	2 010
1	4 100	5 101	7 111	6 110

3-muutuja Karnaugh' kaart

$x_1 x_2$	$x_3 x_4$			
	00	01	11	10
00	0 0000	1 0001	3 0011	2 0010
01	4 0100	5 0101	7 0111	6 0110
11	12 1100	13 1101	15 1111	14 1110
10	8 1000	9 1001	11 1011	10 1010

4-muutuja Karnaugh' kaart

näide:

3-muutuja loogikafunktsiooni $f(x_1 x_2 x_3) = x_1 \bar{x}_2 \vee x_3$ tõeväärtustabel:

$x_1 x_2 x_3$	$x_1 \bar{x}_2 \vee x_3$
0 0 0	0
0 0 1	1
0 1 0	0
0 1 1	1
1 0 0	1
1 0 1	1
1 1 0	0
1 1 1	1

.... paikneb 3-muutuja Karnaugh' kaardil:

x_1	$x_2 x_3$			
	00	01	11	10
0	0	1	1	0
1	1	1	1	0

$x_4 \backslash x_3$	00	01	11	10
00	0 00000	1 00001	3 00011	2 00010
01	4 00100	5 00101	7 00111	6 00110
11	12 01100	13 01101	15 01111	14 01110
10	8 01000	9 01001	11 01011	10 01010

$x_1 = 0$

$x_4 \backslash x_3$	00	01	11	10
00	16 10000	17 10001	19 10011	18 10010
01	20 10100	21 10101	23 10111	22 10110
11	28 11100	29 11101	31 11111	30 11110
10	24 11000	25 11001	27 11011	26 11010

$x_1 = 1$

5-muutuja Karnaugh' kaart

(kolmemõõtmeline !)

$x_1 = 0$

$x_1 = 1$

$x_5 \backslash x_4$	00	01	11	10
00	0 000000	1 000001	3 000011	2 000010
01	4 000100	5 000101	7 000111	6 000110
11	12 011100	13 011101	15 011111	14 011110
10	8 011000	9 011001	11 011011	10 011010

$x_1 x_2 = 00$

$x_1 x_2 = 01$

$x_1 x_2 = 11$

$x_1 x_2 = 10$

$x_1 \backslash x_2$	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

6-muutuja Karnaugh' kaart

(kolmemõõtmeline)



? aga kuidas paiknevad muutujad $x_1 x_2$ 2-muutuja kaardil ?

vaatame veelkord 2-muutuja kaarte :

või

--	--	--	--

2 - muutuja
Karnaugh' kaart

2 - muutuja
Karnaugh' kaart

$x_2 \backslash x_1$	0	1
0	00	01
1	10	11

või

$x_1 \backslash x_2$	00	01	11	10

(2-muutuja kaart on praktikas ebaoluline)

Kontuurid

Karnaugh' kaardil valitakse välja kindlate mõõtmetega ruutude gruppe, mida nimetatakse **kontuurideks**.

Tasandilise kaardi *kontuurid* on ristkülikud lubatud küljepikkustega

$2^{\text{täisarv}}$ ehk $2^m \times 2^n$ ruutu.

2-mõõtmelise Karnaugh' kaardi kontuuride kõikvõimalikud suurused :

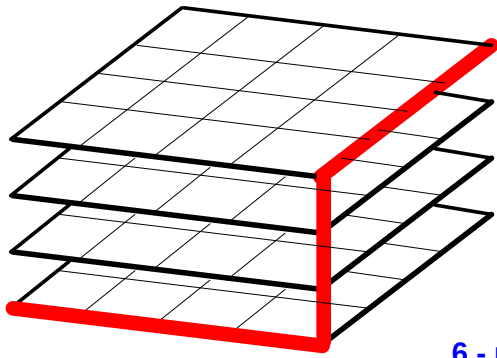
- 1 × 1 ruutu
- 1 × 2 ruutu
- 1 × 4 ruutu
- 2 × 2 ruutu
- 2 × 4 ruutu
- 4 × 4 ruutu

$2^m \times 2^n$

3-mõõtmelise Karnaugh' kaardi kontuuride võimalikud suurused :

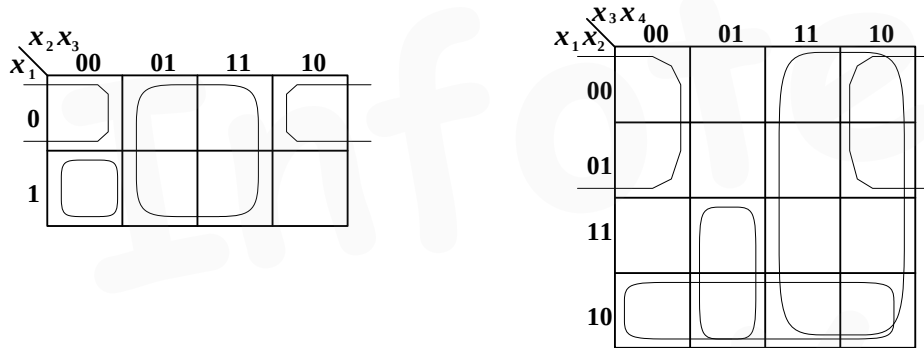
- 1 × 1 × 1 ruutu
- 1 × 1 × 2 ruutu
- 1 × 1 × 4 ruutu
- 1 × 2 × 1 ruutu
- 1 × 2 × 2 ruutu
- 1 × 2 × 4 ruutu
-
- 4 × 4 × 4 ruutu

kuigi ka $8 = 2^n = 2^3$ siis :



6 - muutuja Karnaugh' kaart :
kontuuri küljepikkus "8 ruutu" ei mahu isegi suurimale kaardile

Seega pole Karnaugh' kaardi kontuurideks ruutudegrupid küljepikkusega **3 ruutu**. Ülejäänud võimalikud küljepikkused (mis üldse mahuvad kaardile) on kontuuridel lubatud.
Niisiis osutuvad kontuuride võimalikeks küljepikkusteks **1 2 ja 4 ruutu**.

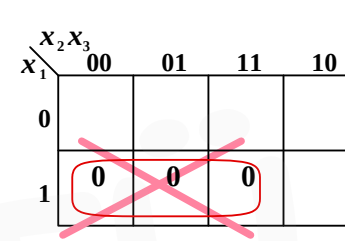


mõned suvalised näidiskontuurid
3-muutuja kaardil ja 4-muutuja kaardil

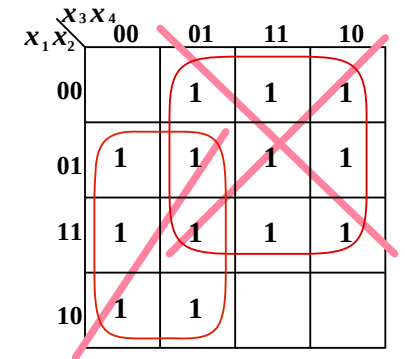
! tüüpiline viga:



kontuuri küljepikkus pole kunagi **3 ruutu** !
(s.t. kaardil ei tohi valida sellist kontuuri, mille mistahes küljepikkus on 3)



valestivalitud "kontuurid"

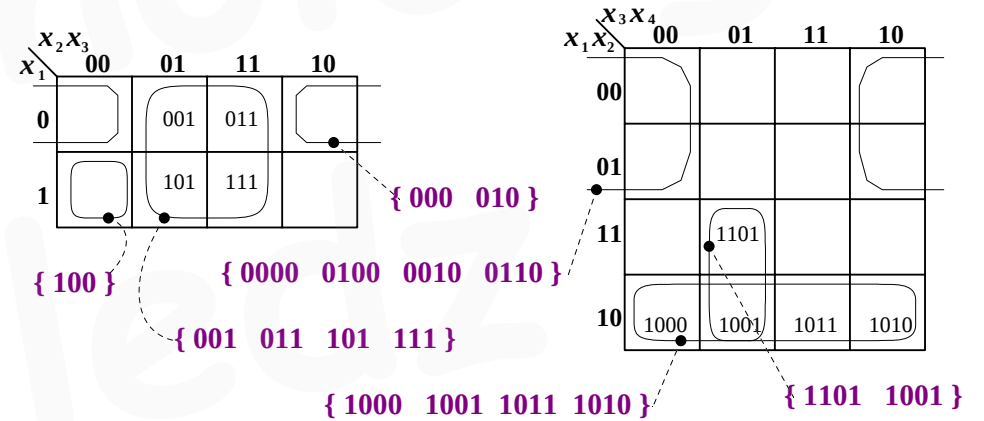


Kontuuride seos intervallidega

meenutame :

2ndvektorite teatud kindlate tunnustega hulka nimetatakse **intervalliks**.

Karnaugh' kaardi **iga kontuur** vastab kahendvektorite mingile **intervallile**:



suvalised kontuurid ja nende vastavad intervallid

mistahes kontuuri koosseisu kuuluvatele ruutudele vastavad **argumentvektorid** / 2ndvektorid moodustavad **intervalli**.

Karnaugh' kaardi piirkonnad

kuna iga muutuja x_i saab omada kahte väärtust, siis

n -muutuja kaardil on $2n$ omavahel kattuvat **piirkonda** (ruutude gruppi):

$$x_1 = 0 \quad x_1 = 1 \quad x_2 = 0 \quad x_2 = 1 \quad \dots \quad x_n = 0 \quad x_n = 1$$

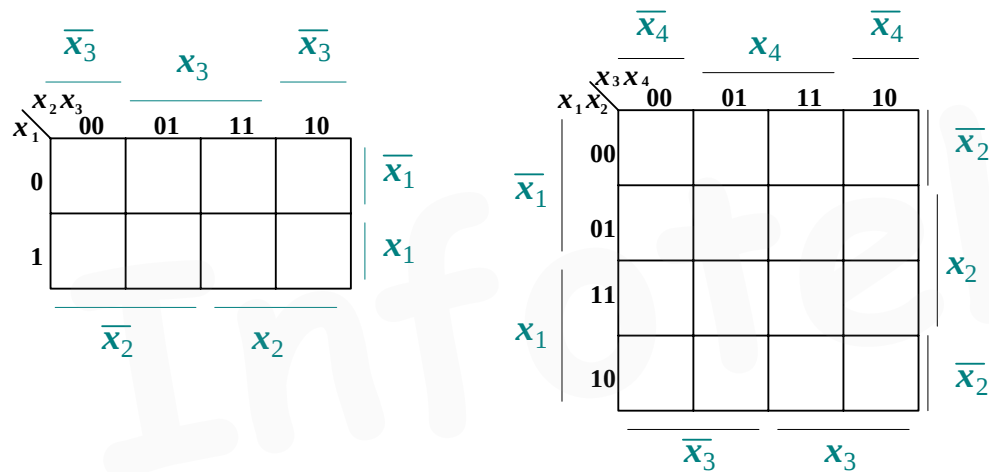
kaardi piirkondi võib tähistada vastavalt:

$$\bar{x}_1 \quad x_1 \quad \bar{x}_2 \quad x_2 \quad \dots \quad \bar{x}_n \quad x_n$$

Järgmisel joonisel on näidatud 3-muutuja kaardi kõik **6 piirkonda**

(igaihe suurus on 4 ruutu) ja

4-muutuja kaardi kõik **8 piirkonda** (kus iga piirkond on 8-ruuduline):



Karnaugh' kaardi **piirkonnad**

Piirkondade suurus

Iga piirkond on täpselt "**pool kaarti**" suur ehk tema koosseisu kuuluvad (suvalise kaardi korral) täpselt **pooled** kaardi kõikidest ruutudest.

Piirkonnad kattuvad omavahel.

Kaardi **iga ruut** kuulub **pooltesse** selle kaardi piirkondadesse

Loogikafunktsioonide minimeerimine

Loogikafunktsiooni *minimeerimine* on tema esitamine *minimaalse keerukusega* (ehk *algtermide* vähima võimaliku arvuga) normaalkujul —

Minimaalsel Disjunktiiisel Normaalkujul (MDNK)

või **Minimaalsel Konjunktiiisel Normaalkujul** (MKNK)

Loogikafunktsioone võib minimeerida nende avaldise teisendamisega *loogikaalgebra põhiseoseid* ja *loogikatehete asenduseseid* kasutades.

Loogikafunktsiooni minimeerimine KARNAUGH' KAARDI abil

Loogikafunktsiooni *minimeerimine* on tema esitamine minimaalse keerukusega normaalkujul — **Minimaalsel Disjunktiiisel Normaalkujul** (MDNK) või **Minimaalsel Konjunktiiisel Normaalkujul** (MKNK).

Loogikafunktsioone võib minimeerida (nagu varem tegimegi) nende avaldise teisendamisega *loogikaalgebra põhiseoseid* ja *loogikatehete asenduseseid* kasutades. Võimalusekorral on eelistatum teha seda siiski *Karnaugh' kaardi* abil.

Loogikafunktsiooni minimeerimine on *Karnaugh' kaardi* põhiline rakendusvaldkond.

Karnaugh' kaart on kõige eelistatum "käsitsi" minimeerimisvahend, kuid ta on rakendatav ainult kuni **6-muutuja** loogikafunktsioonide korral.

meenutame :

OSALISELT määratud loogikafunktsioon

Loogikafunktsioon on *osaliselt määratud* kui osade argumentvektorite jaoks on jäetud lahtiseks, kumba loogikaväärtuse peab funktsioon nende korral omandama.

Sellised argumentvektorid on funktsiooni **määramatuspiirkonnaks**.

Seega võib loogikafunktsioonidel olla olemas :

0-de piirkond

1-de piirkond

määramatuspiirkond — kus väärtus tohib olla "ükspuha" kumb, kas **1** või **0**



mida tehakse **määramatuspiirkonnaga** ?

määramatuspiirkond "*määratakse alati lõpuni*" ehk jaotatakse ära **0-de** ja **1-de** piirkonna vahel

ehk teiste sõnadega:

osaliselt määratud funktsioonilt minnakse alati üle *täielikult määratud* funktsioonile.

Loogikafunktsiooni võib "lõpuni määrata" ka meelevaldselt / juhuslikult, kuid enamasti tasub seda teha sihipäraselt — misjuhul saavutame talle "esindajaks" **lihtsaima võimaliku loogikaavaldise**.

Olles "määratud lõpuni" mingi osaliselt määratud funktsiooni, oleme talle valinud esindajaks ühe täielikult määratud funktsiooni.

Täielikult määratud funktsioon on vaadeldav **osaliselt** määratud funktsiooni erijuhtumina, kus *määramatuspiirkond* puudub.



ülesanne: _____



Leida Karnaugh' kaardiga MDNK ja MKNK (osaliselt määratud) 4-muutuja loogikafunktsioonile:

$$f(x_1 \dots x_4) = \prod (1, 4, 5, 9, 11, 12, 13, 15)_0 (3, 14)_-$$

Tuvasta, kas leitud *normaalkujud* on omavahel võrdsed: MDNK = MKNK?



$x_1 x_2$	$x_3 x_4$			
	00	01	11	10
00	0	1	3	2
01	4	5	7	6
11	12	13	15	14
10	8	9	11	10

$x_1 x_2$	$x_3 x_4$			
	00	01	11	10
00	1	0	—	1
01	0	0	1	1
11	0	0	0	—
10	1	0	0	1

MDNK ja MKNK leidmised on teineteisest sõltumatud ja nad võib leida ükskõik kumbas järjekorras.

Leiame esimesena MDNK

! DNK saadakse alati loogikafunktsiooni **1de piirkonnast !**
ehk: kontuuridega tuleb kaardil katta 1-de ruudud

Kontuuride valimise reeglid

- Katame kaardil asuvad 1de ruudud **suurimate** kontuuridega, kasutades seejuures **võimalikult vähe** kontuure. (0-le ei tohi valida 1-de kontuuridesse)
- Määramatus*e ruute tohib seejuures kontuuridega katta, kuid ei pea katma. *Määramatusi* katame kontuuridega ainult siis, kui see aitab kasvatada veelgi suuremaks mõnda niikuinii vajalikku kontuuri.
- Kontuurid **tohivad kattuda** — peavad olema suurimad võimalikud.

