HULGAD
Hulgaaritmeetilised tehted
Hulgaalgebra (**Cantor**'i **algebra**)

. . . . **Hulk** on koosvaadeldavate hulga**elementide** kogum . . . .

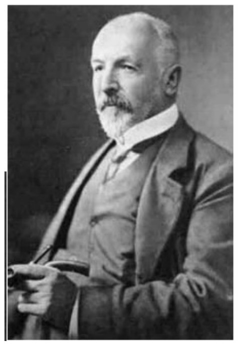
(hulk koosneb **elementidest**)

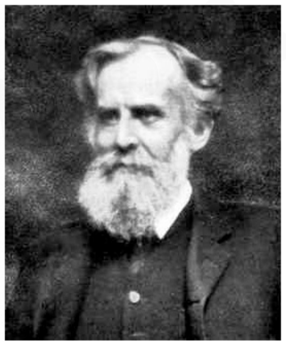
Hulgas ei ole <u>korduvaid</u> elemente: igat hulgaelementi on "**1 tk**."

Hulkade jaoks on defineeritud **5** hulgaaritmeetilist tehet.
1 *unaarne* ja 4 *binaarset* tehet :

tehte NIMI	formaalne tähistus
hulga **täiend**	$\overline{A}$
hulkade **ühend** (hulkade **liitmine**)	$A \cup B$
hulkade **ühisosa** (hulkade **korrutamine**)	$A \cap B$
hulkade **vahe** (hulkade **lahutamine**) "A *ilma* B-ta"	$A \setminus B$
hulkade **sümmeetriline vahe**	$A \triangle B$

Hulgatehete tulemuseks on samuti **hulk**.

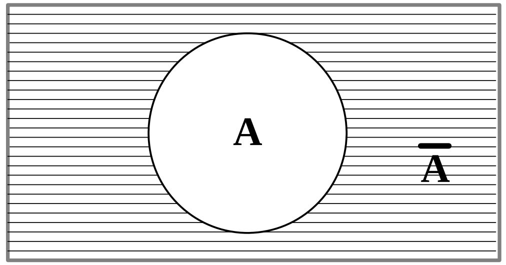




Georg **Cantor** (1845 — 1918) John **Venn** (1834 — 1923)

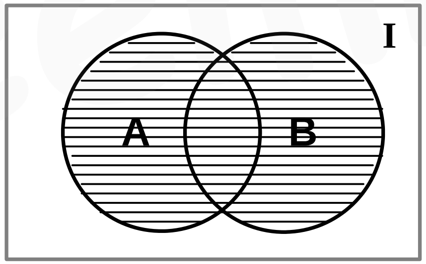
Venni diagrammid

Visuaalse illustreerimise hea vahend hulkade jaoks.
Venni diagrammi saab koostada kuni **4** hulga jaoks.
Hulga**tehete** tulemuseks olev hulk viirutatuna **Venni diagrammidel** :



hulga A **täiend** $\overline{A}$

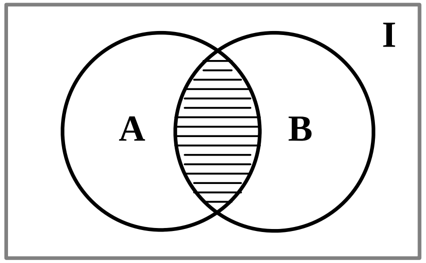
(**täiend** on alati *universaalhulgani*)



$A \cup B$

hulkade **ühend**

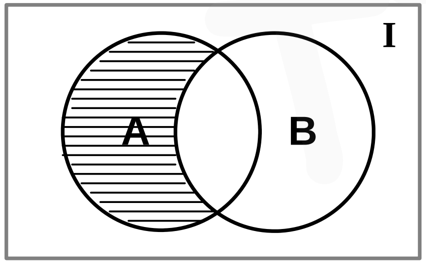
A ja B on **liidetud**



A ∩ B

hulkade **ühisosa**

A ja B on **korrutatud**



A \ B

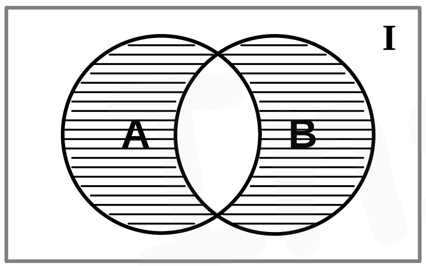
hulkade **vahe**

hulgast A on **lahutatud** hulk B

" *A ilma B-ta* "

A \ B ≠ **B \ A** ehk hulkade lahutamine **pole** k o m m u t a t i i v n e
(oleneb operandide järjekorrast)

ainus *mittekommutatiivne* (binaarne) hulgatehe.



A ∆ B

hulkade **sümmeetriline vahe**

Hulgaalgebra (*Cantor'i algebra*) sisaldab **3** tehet : $\overline{\ }$ $\cup$ $\cap$

meenutame : Loogikaalgebra (*Boole' i algebra*) sisaldab : $\overline{\ }$ $\vee$ $\wedge$

hulgaalgebra ja **loogika**algebra on sarnased ("isomorfsed")

teineteisele VASTAVAD mõisted (tehted, loogikaväärtused ja hulgad) :

loogikas		hulkades	
inversioon	$\overline{A}$	**täiend**	$\overline{A}$
konjunktsioon	$\wedge$	**ühisosa**	$\cap$
disjunktsioon	$\vee$	**ühend**	$\cup$
. . . ei oma **loogikas** vastavat tehet . . .		**lahutamine** e. **vahe**	$\setminus$
summa mooduliga 2 **välistav VÕI** (XOR)	$\oplus$	**sümmeetriline vahe**	Δ
konstant **0**		**tühi hulk**	$\varnothing$ või { }
konstant **1**		**universaalhulk**	**I**

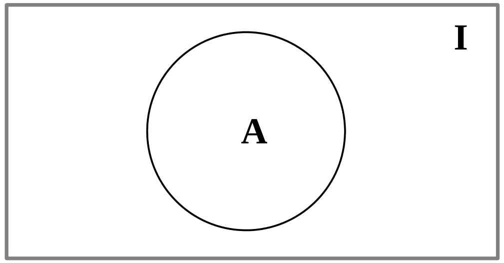
Hulgatehete prioriteet: $\overline{\ }$ $\cap$ $\cup$ $\setminus$ Δ

HULGAALGEBRA PÕHISEOSED

meile tuttavad **loogikaalgebra põhiseosed** muutuvad **hulgaalgebra põhiseosteks**, kui nendes teha eelnevalt näidatud vastavad asendused.

esineb **duaalsus** :

Ka *hulgaavaldiste* jaoks leiduvad *duaalsed* hulgaavaldised
ja kehtib *duaalsusprintsiip*.



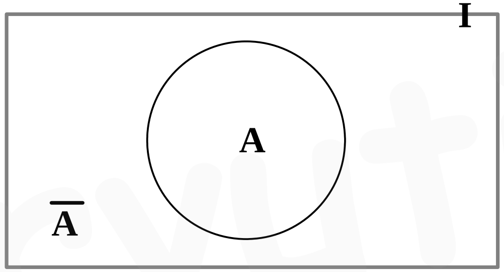
ühe hulga Venni diagramm

HULGAALGEBRA PÕHISEOSED

$$A = \overline{\overline{A}} \qquad \overline{I} = \varnothing \qquad \overline{\varnothing} = I$$

$$A \cup \varnothing = A \qquad A \cap I = A$$

$$A \cup I = I \qquad A \cap \varnothing = \varnothing$$



$$A \cap \overline{A} = \varnothing \qquad A \cup \overline{A} = I$$

idempotentsus:

$$A \cup A = A \qquad A \cap A = A$$

kommutatiivsus:

$$A \cup B = B \cup A \qquad A \cap B = B \cap A$$

verbaalsel kujul: ". . . . **tehte** tulemus ei olene **operandide** järjekorrast . . . "

assotsiatiivsus:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

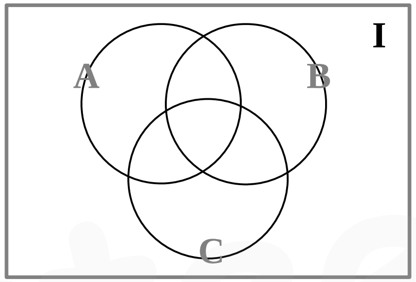
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

verbaalsel kujul: ". . . . **avaldise** tulemus ei olene **tehete** järjekorrast . . . . "

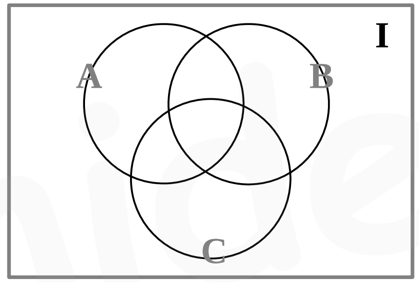
distributiivsus: *(sulgude "lahtikorrutamine" ja "lahtiliitmine")*

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

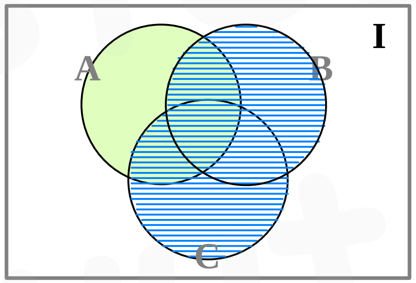
3 hulga **Venni diagramm** : kontrollime *distributiivsuse* kehtimist :



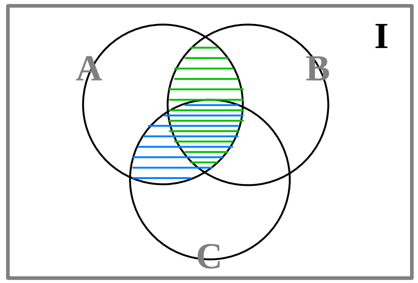
$A \cap (B \cup C)$



$(A \cap B) \cup (A \cap C)$



$A \cap (B \cup C)$



$(A \cap B) \cup (A \cap C)$

mõlemad hulgaavaldised määravad diagrammil **sama piirkonna** (võrdsed avaldised)

eelmise suhtes *duaalne* distribiivsusseadus ehk *"sulgude lahtiliitmine"* :

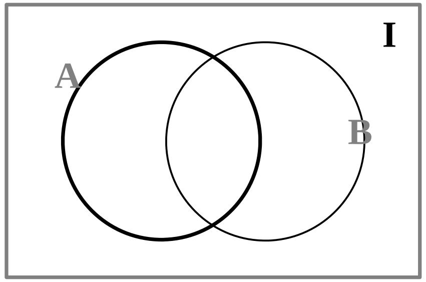
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

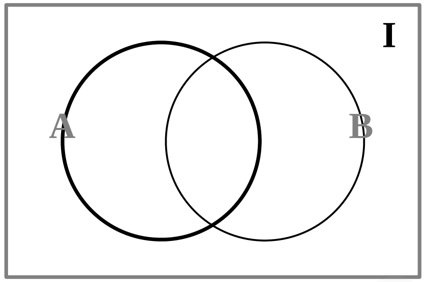
distributiivsusseadus "tagurpidi": võimaldab tuua ühist tegurit sulgude ette

neeldumine:

$$A \cap (A \cup B) = A \qquad A \cup (A \cap B) = A$$

2 hulga **Venni diagramm** :





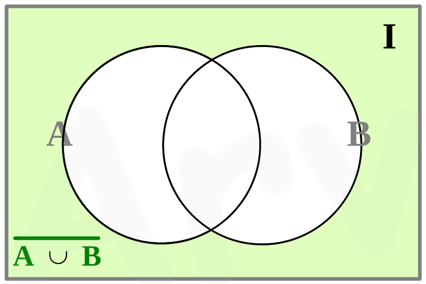
neeldumine:

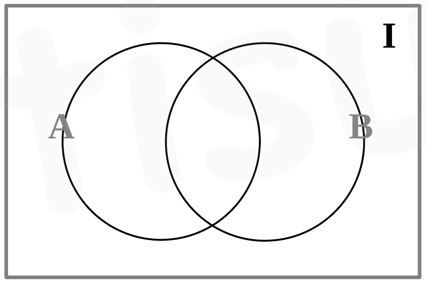
$$A \cap (\overline{A} \cup B) \;=\; A \cap B$$

$$A \cup (\overline{A} \cap B) \;=\; A \cup B$$

DeMorgani seadused (kahe hulga jaoks):

$$\overline{A \cup B} \;=\; \overline{A} \cap \overline{B} \qquad\qquad \overline{A \cap B} \;=\; \overline{A} \cup \overline{B}$$





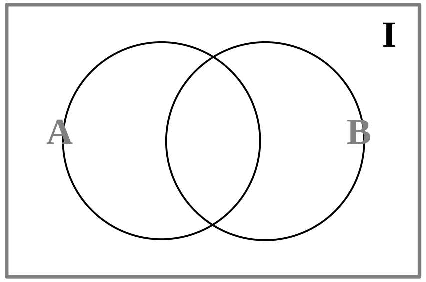
kleepimine:

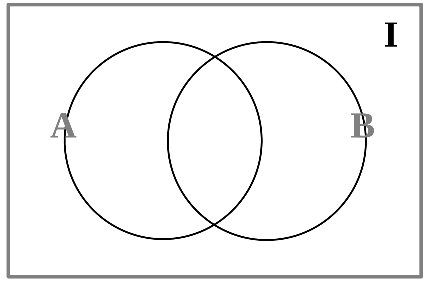
$$A \;=\; (A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) \qquad\qquad A \;=\; (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$$

Hulgaaritmeetilised asendusseosed

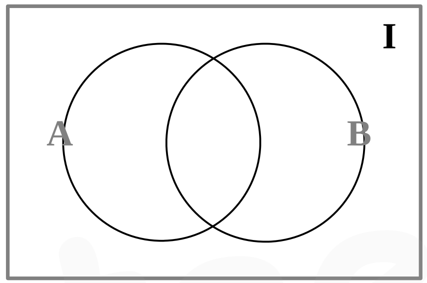
Asendusseosed võimaldavad asendada hulgatehteid $\setminus$ ja Δ hulgaalgebrasse kuuluvate tehete $\overline{\ }$ $\cap$ $\cup$ kaudu:

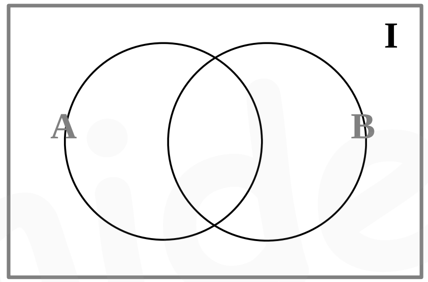
$$A \setminus B \;=\; A \cap \overline{B}$$





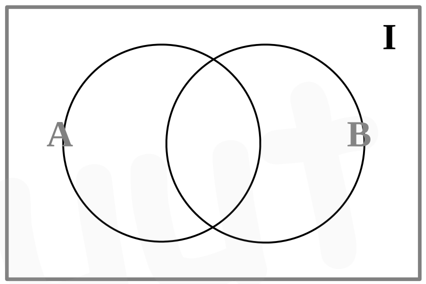
järeldub tehte Δ definitsioonist: $$A \,\Delta\, B \;=\; (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

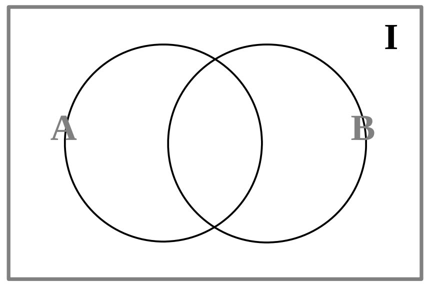




alternatiivne *asendusseos* tehtele Δ :

$$A \,\Delta\, B \;=\; (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$





ülesanne :

On antud hulgad :

$A = \{a\ b\ c\ d\ e\}$ $\qquad$ $B = \{a\ b\ c\ d\ e\ f\ g\ h\}$

Leida $A \cup B$ $A \cap B$ $A \setminus B$ $B \setminus A$ $B \,\Delta\, A$

$A \cup B = \{a\ b\ c\ d\ e\ f\ g\ h\} = B$

$A \cap B = \{a\ b\ c\ d\ e\} = A$

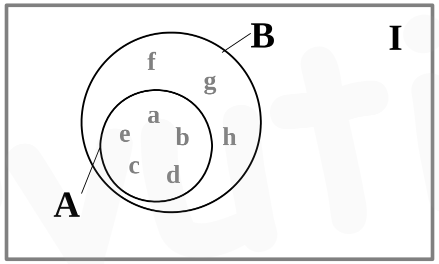
$A \setminus B = \{\ \}$

$B \setminus A = \{f\ g\ h\}$

$B \,\Delta\, A = B \setminus A$

seda saab järeldada ka **asendusseose** abil / kaudu, mis meie erijuhtumil :

$A \,\Delta\, B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \varnothing \cup (B \setminus A) = B \setminus A$



vaadeldud hulkade **Venni diagramm**

siin : hulk **A** on hulga **B** **osahulk / alamhulk** : $A \subset B$

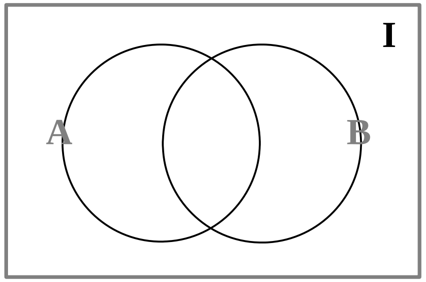
ülesanne :

Leida $A \cap B$ ja leida hulk **A** ja hulk **B** kui :

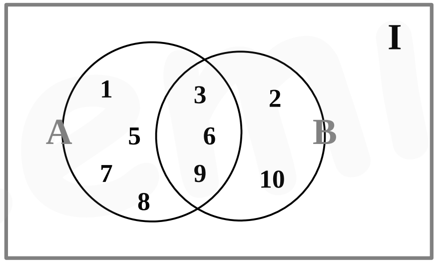
$A \setminus B = \{1, 5, 7, 8\}$ $B \setminus A = \{2, 10\}$

$A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

võtame appi **2** hulga **Venni diagrammi** :



ilmneb, et : $A \cap B = \{3\ 6\ 9\}$



$A = \{1\ 3\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\}$ $B = \{2\ 3\ 6\ 9\ 10\}$

ülesanne :

Mida saab ütelda hulkade **A** ja **B** kohta järgneval viiel juhul ehk millisel erijuhtumil / tingimusel iga konkreetne võrdus kehtib :

(kuidas peavad **A** ja **B** paiknema teineteise suhtes)

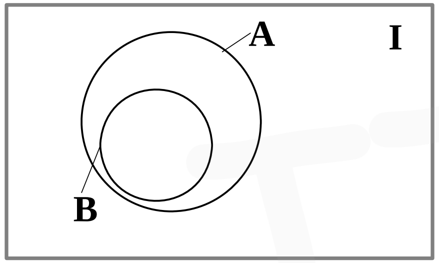
$A \cup B = A$ $A \cap B = A$

$A \setminus B = A$ $A \cap B = B \cap A$

$A \setminus B = B \setminus A$

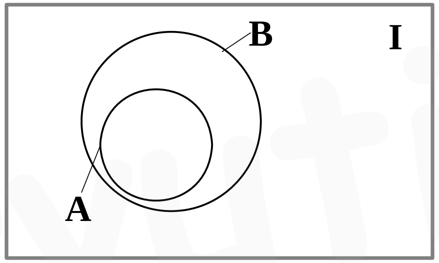
"**A** *või* **B** *on tühi hulk*"   oleks triviaalne lahend;   seda me ei pea vastuseks.
Otsime selliseid erijuhtumeid, kus hulgad A ja B on mõlemad **mittetühjad** ja vaadeldav võrdus kehtib ikkagi

$\mathbf{A \cup B = A}$ (millal kehtib ?)



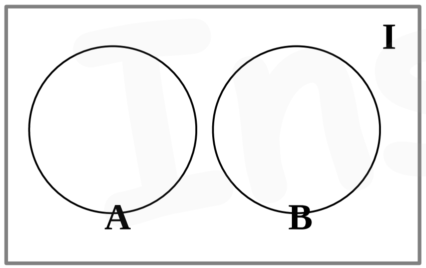
. . . kehtib siis kui $\mathbf{B \subset A}$

$\mathbf{A \cap B = A}$ (millal kehtib ?)



. . . kehtib siis kui $\mathbf{A \subset B}$

$\mathbf{A \setminus B = A}$ (millal kehtib ?)

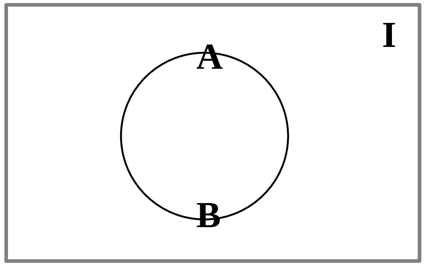


. . . kehtib siis kui $\mathbf{A \cap B = \varnothing}$

$\mathbf{A \cap B = B \cap A}$ (millal kehtib ?)

selline võrdus **kehtib alati** :   *kommutatiivsus*
selle võrduse kehtimine ei anna mingit infot hulkade **A** ja **B** kohta

$\mathbf{A \setminus B = B \setminus A}$ (millal kehtib ?)



. . . kehtib siis kui $\mathbf{A = B}$

Hulgaaritmeetiliste avaldiste TEISENDUSED

Hulgaavaldis teisendatakse *hulgaalgebra põhiseoste* ja *hulgatehete asendusseoste* abil lihtsamale / lühemale, kuid esialgsega samaväärsele kujule.
Teisenduse eesmärgiks võib olla hulgaavaldise viimine *Cantori normaalkujule.*   (DNK ja KNK analoogid hulgaavaldiste jaoks)
Hulgaavaldise *Cantori normaalkuju* on
ühendite ühisosa või **ühisosade ühend**

ülesanne :

Lihtsusta hulgaavaldis :

$$[\,(\mathbf{A \setminus B}) \cup (\mathbf{A \,\Delta\, B}) \cup (\mathbf{A \setminus C})\,] \cap \overline{\mathbf{A}} =$$

. . . . teisendamisel alati **asendame** tehted Δ ja $\setminus$:

$$= [\,(A \setminus B) \cup (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \setminus C)\,] \cap \overline{A} =$$

$$= [\,(A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{C})\,] \cap \overline{A} =$$

$$= (A \cap \overline{B} \cap \overline{A}) \cup (B \cap \overline{A} \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{C} \cap \overline{A}) =$$

$$= B \cap \overline{A} \cap \overline{A} =$$

$$= B \cap \overline{A}$$

pane tähele :

olles jõudnud avaldisekujuni :

$$\ldots\ldots = [\,(A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \setminus C)\,] \cap \overline{A} = \ldots\ldots$$

. . . . võib nurksulud ka kohe järgmisena **lahtikorrutada** .
kuna **A \ B** kui ka **A \ C** on hulga **A** **osahulgad**, siis on äratuntav et :

$$(A \setminus B) \cap \overline{A} = \varnothing$$

$$(A \setminus C) \cap \overline{A} = \varnothing$$

. . . . misjuhul jääb avaldises alles ainult korrutis :

$$(B \setminus A) \cap \overline{A}$$

iseseisvaks lahendamiseks :

Teisenda eelnevat avaldist :

$$[\,(A \setminus B) \cup (A \mathbin{\vartriangle} B) \cup (A \setminus C)\,] \cap \overline{A} =$$

. . . . kasutades tehte Δ teist võimalikku *asendusseost* :

$$A \mathbin{\vartriangle} B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

. . . . edukal teisendamisel peab tulema sama tulemus :

$$\ldots\ldots = B \cap \overline{A}$$

ülesanne :

Lihtsusta hulgaavaldis :

$$A \cup (C \setminus A) \cup (A \cap B \cap C) =$$

$$= A \cup (C \cap \overline{A}) \cup (A \cap B \cap C) =$$

$$= (A \cup C) \cap (A \cup \overline{A}) \cup (A \cap B \cap C) =$$

$$= (A \cup C) \cup (A \cap B \cap C) =$$

$$= A \cup C \cup (A \cap B \cap C) =$$

$$= A \cup C$$

ülesanne :

Lihtsusta hulgaavaldis :

$$(A \cap C) \cup (B \cap C) \cup (A \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap B \cap C) =$$

. . . . etteantud avaldis on juba **Cantor'i normaalkuju** . . . .

$$= A \cap (C \cup \overline{C}) \cup (B \cap C) \cup (\overline{A} \cap B \cap C) =$$

$$= A \cup (B \cap C) \cup (\overline{A} \cap B \cap C) =$$

$$= A \cup (B \cap C)$$

ülesanne :

Lihtsusta hulgaavaldis :

$$\overline{\overline{(A \setminus B)} \cap \overline{(B \setminus C)}} \cup \overline{(C \setminus A)} =$$

$$= \overline{\overline{(A \setminus B)}} \cup \overline{\overline{(B \setminus C)}} \cup \overline{(C \setminus A)} =$$

$$= (A \setminus B) \cup (B \setminus C) \cup \overline{(C \cap \overline{A})} =$$

$$= (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{C}) \cup (\overline{C} \cup \overline{\overline{A}}) =$$

$$= (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{C}) \cup \overline{C} \cup A =$$

$$= \overline{C} \cup A$$

ülesanne :

Tõesta hulgaavaldiste võrduse kehtivus :

$$A \triangle (A \cap B) = A \setminus B$$

. . . . teisendame / lihtsustame võrduse **vasakut** poolt :

$$A \triangle (A \cap B) = [A \setminus (A \cap B)] \cup [(A \cap B) \setminus A] =$$

$$= [A \cap \overline{(A \cap B)}] \cup [(A \cap B) \cap \overline{A}] =$$

$$= [A \cap (\overline{A} \cup \overline{B})] \cup [A \cap B \cap \overline{A}] =$$

$$= A \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) =$$

$$= (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{B}) =$$

$$= A \cap \overline{B} =$$

$$= A \setminus B$$

iseseisvaks lahendamiseks :

Teisenda eelneva võrduse vasaku poole avaldist $\mathbf{A \vartriangle (A \cap B)}$ veelkord, kasutades teist võimalikku *asendusseost* :

$$\mathbf{A \vartriangle B \;=\; (A \cup B) \setminus (A \cap B)}$$

. . . . edukal teisendamisel peab tulema sama tulemus :

$$. . . . . \;=\; \mathbf{A \cap \overline{B}} \;=\; \mathbf{A \setminus B}$$

ülesanne :

Tõesta hulgaavaldiste võrduse kehtivus :

$$\mathbf{(A \setminus B) \cap (C \setminus D) \;=\; (A \cap C) \setminus (B \cup D)}$$

. . . . valime, kas teisendame võrduse **vasakust** või **paremast** poolest alates (võrduse <u>teiseks</u> pooleks) . . . . no valime näiteks **vasaku** :

$$\mathbf{(A \setminus B) \cap (C \setminus D) \;=\; (A \cap \overline{B}) \cap (C \cap \overline{D})} \;=$$

$$= \mathbf{A \cap \overline{B} \cap C \cap \overline{D}} \;=$$

$$= \mathbf{A \cap C \cap \overline{B} \cap \overline{D}} \;=$$

$$= \mathbf{A \cap C \cap \overline{B \cup D}} \;=$$

$$= \mathbf{A \cap C \setminus B \cup D} \;=$$

$$= \mathbf{(A \cap C) \setminus (B \cup D)}$$

oleks võinud ka "vastupidi suunas" teisendada:
võrduse **parema** poole avaldis **vasaku** poole avaldiseks

iseseisvaks lahendamiseks :

Kontrolli suvalisel viisil (hulgaavaldise teisenduse teel või Venni diagrammide võrdlemise teel) , millised järgnevad võrdused **kehtivad** ? :

$$\mathbf{A \setminus (A \setminus B) \;=\; A \cup B}$$

$$\mathbf{A \setminus (A \setminus B) \;=\; A \cap B}$$

$$\mathbf{A \setminus B \;=\; A \setminus (A \cap B)}$$

$$\mathbf{A \setminus (B \cap C) \;=\; (A \setminus B) \cap (A \setminus C)}$$

$$\mathbf{A \setminus (B \cup C) \;=\; (A \setminus B) \cap (A \setminus C)}$$

$$\mathbf{(A \cap B) \setminus C \;=\; (A \setminus C) \cup (B \setminus C)}$$

$$\mathbf{(A \cup B) \setminus C \;=\; (A \setminus C) \cup (B \setminus C)}$$

vastus:

$\mathbf{A \setminus (A \setminus B) \;\neq\; A \cup B}$ (. . . . võrdus ei kehti)

$\mathbf{A \setminus (A \setminus B) \;=\; A \cap B}$ (. . . . kehtib)

$\mathbf{A \setminus B \;=\; A \setminus (A \cap B)}$ (. . . . kehtib)

$\mathbf{A \setminus (B \cap C) \;\neq\; (A \setminus B) \cap (A \setminus C)}$ (. . . . võrdus ei kehti)

$A \setminus (B \cup C) \;=\; (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ (. . . . kehtib)

$(A \cap B) \setminus C \;\neq\; (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$ (. . . . võrdus ei kehti)

$(A \cup B) \setminus C \;=\; (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$ (. . . . kehtib)