

GRAAFID

Graaf on objektidevaheliste seoste *tasandiline* (ehk 2-mõõtmeline) joonismudel.

Graaf osutub sobivaks abstraktseks esitusvahendiks paljude ülesannete püstitamisel ja lahendamisel.

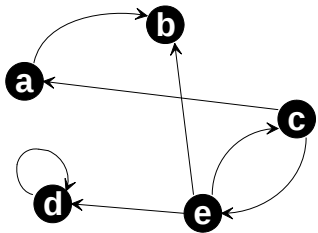
Graaf koosneb kahte tüüpi elementidest: **tippudest** (ingl. *vertex*) ja neid ühendavatest **kaartest** (ingl. *edge*).

(Kaari nimetatakse harvem ka **servadeks**)

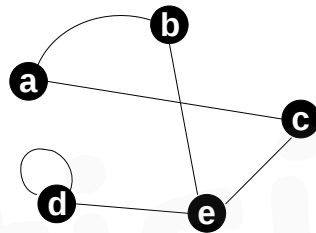
Tähistades graafi *tippude hulga* T ja graafi *kaarte hulga* K , võime graafi G esitada paarina:

$G = (T, K)$

Olgu graafi tippude hulk $T = \{a, b, c, d, e\}$ Esitame järgnevat esitades mitmeid suvalisi sellise tippudehulgaga graafe:



orienteeritud graaf



orienteerimata graaf

(orienteerimata | "tavaline") graaf vs orienteeritud graaf

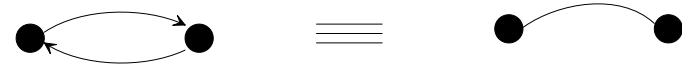
Kaarte omadusest tulenevalt jagunevad graafid **orienteeritud** graafideks ja **orienteerimata** graafideks.

Orienteeritud graafi kõik kaared on *suunatud* ja neid esitatakse graafi joonisel nooltega.

Orienteerimata graafi kõik kaared on suunamata ja neid esitatakse graafi joonisel kahte tippu ühendava lihtsa joonega.

Üheks olulisemaks tegevuseks graafil on *kaarte läbimine*, mille käigus liigutakse graafi tippude vahel neid ühendavate kaarte "kaudu".

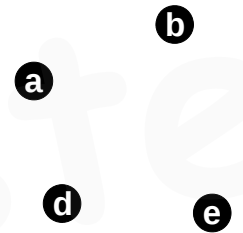
Suunatud kaart saab läbida ainult tema suunas. Suunamata kaart saab läbida mõlemas suunas. Seega on *suunamata* graafikaar samaväärne vastassuunaliste kaarte paariga *suunatud* graafis:



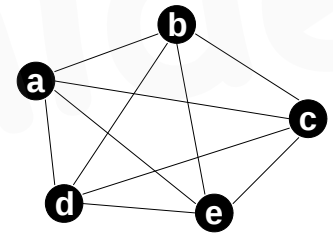
Graafi esitamisel on oluline, millised *tippud* on ühendatud *kaartega* — ja graafi joonisel ei ole oluline, kuhu täpsesse asukohta *tippud* on graafis paigutatud ja "millist teed pidi kulgevad" (ehk mis "kujuga" on joonistatud) *tippe* ühendavad *kaared*.

tühi graaf vs täielik graaf

Kui graafil pole ühtegi kaart ehk tema kaarte hulk on tühi: $K = \{\}$, siis sellist graafi nimetatakse **tühjaks** graafiks. Vastupidine äärmus on **täielik** graaf (täisgraaf), kus iga tipp on ühendatud kõikide teiste tippudega:



tühi graaf



täielik graaf

tippude astmed

Orienteeritud graafi **tipu väljundaste** on sellest tipust väljuvate kaarte arv.

Orienteeritud graafi **tipu sisendaste** on sellesse tippu saabuvate kaarte arv.

Orienteerimata graafi **tipu aste** on selle tipuga seotud kaarte arv.

Paarisarvulise astmega tippe nimetatakse ka *paaristippudeks* ja paaritu arvulise astmega tippe *paarituteks* tippudeks.

Kuna iga kaare mõlemad otsad on seotud mingi tipuga, siis jõuame järelduseni, et igal graafil on paarisarv *paarituid* tippe. (Erijuhul 0 paaritut tippu, mis on samuti paarisarv.)

Orienteeritud graaf on **sidus**, kui igast tema tipust leidub tee mistahes teise tippu.

Orienteeritud graaf on **ühepoolselt sidus**, kui tema mistahes kahe tipu **a** ja **b** korral leidub tee kas tipust **a** tippu **b** või vastupidi: leidub tee tipust **b** tippu **a**.

halliga tähistatud järgnevaid mõisteid ei pea pähe õppima!



Tee on orienteeritud graafi kaarte järjestus, kus iga järgmise kaare algustipuks on eelmise kaare lõpptipp. Tee pikkus graafil pole piiratud ja kaared võivad *tee* koosseisus korduda.

Lihttee on tee, mille koosseisus pole korduvaid kaari. Seejuures võib lihttee läbida mõnda graafi tippu korduvalt.

Elementaartee on tee, mis ei läbi ühtegi graafi tippu üle ühe korra.

Orienteerimata graafi korral nimetatakse (orienteeritud graafi) *teele* vastavat kaartejärjestust **ahelaks**. Orienteeritud graafi *lihtteele* vastab orienteerimata graafis **lihtahel** ja *elementaarteele* vastab orienteerimata graafis **elementaarahel**.

Suletud tee on tee orienteeritud graafil, mis lõppeb oma algustipus.

Kontuur on *suletud elementaartee* orienteeritud graafil.

Hamiltoni kontuur läbib (täpselt 1 kord) kõik *orienteeritud* graafi tippu (ja lõppeb oma algustipus).

Orienteerimata graafi *suletud elementaarahelat* nimetatakse **tsükliks**.

Hamiltoni tsükkel läbib (täpselt 1 kord) kõik *orienteerimata* graafi tipud (ja lõppeb oma algustipus).

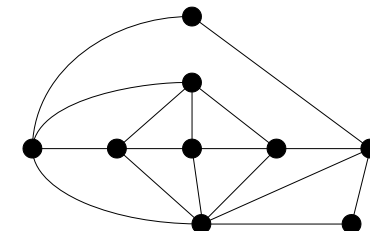
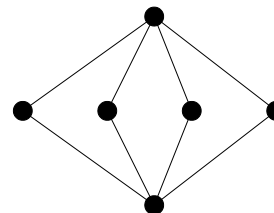
Euleri kontuur on *suletud lihttee* ehk kaartejärjestus, mis läbib (täpselt 1 kord) kõik *orienteeritud* graafi kaared ja lõppeb oma algustipus.

Euleri tsükkel on *suletud lihtahel* ehk kaartejärjestus, mis läbib (täpselt 1 kord) kõik *orienteerimata* graafi kaared (ja lõppeb oma algustipus).

Euleri ahel läbib samuti täpselt 1 kord kõik *orienteerimata* graafi kaared, kuid ei lõppe oma algustipus.

Euleri graaf

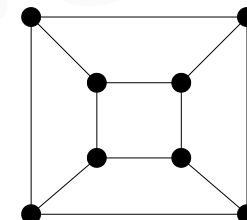
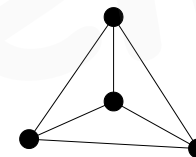
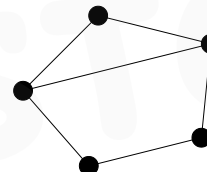
Orienteerimata graaf on **Euleri graaf**, kui ta omab *Euleri tsükli*.



suvalised näited: **Euleri graafid**

Hamiltoni graaf

Orienteerimata graaf on **Hamiltoni graaf**, kui ta omab *Hamiltoni tsükli*.



suvalised näited: **Hamiltoni graafid**

Euleri ja Hamiltoni tsükli / graafide käsitus järgneb allpool.

Graafi $G = (T, K)$ **jääkgraaf** on graaf $Q = (T, B)$ kus $B \subset K$. Seega saadakse jääkgraaf osade kaarte ärajätmisega, kusjuures kõik tipud säilivad.

Graafi $G = (T, K)$ **taandatud** graaf on graaf $Q = (D, B)$ kus on ära jäetud osad graafi G tipud ja nende tippudega seotud kaared.

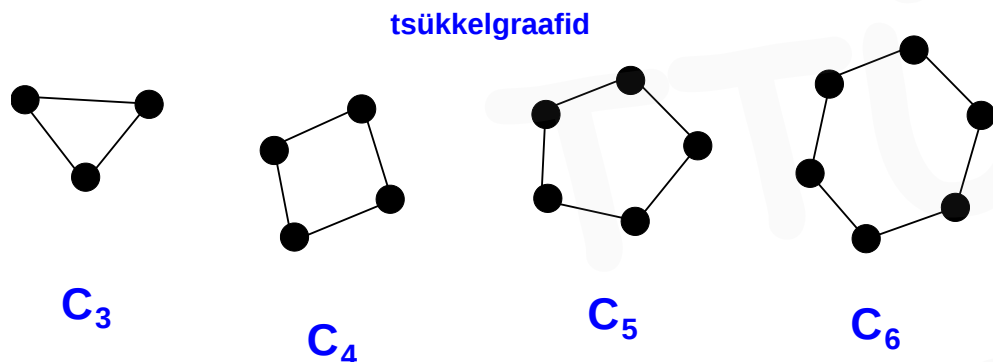
Seega $B \subset K$ ja $D \subset T$

Graaf on mingi graafi **alamgraaf**, kui ta on selle graafi mingi *taandatud* graafi (suhtes) *jääkgraaf* (ehk on sellele graafile samaaegselt nii *taandatud graaf* kui ka *jääkgraaf*).

Kui graaf Q on graafide G *alamgraafiks*, siis võib seda väljendada: $Q \subset G$

tsükelgraaf

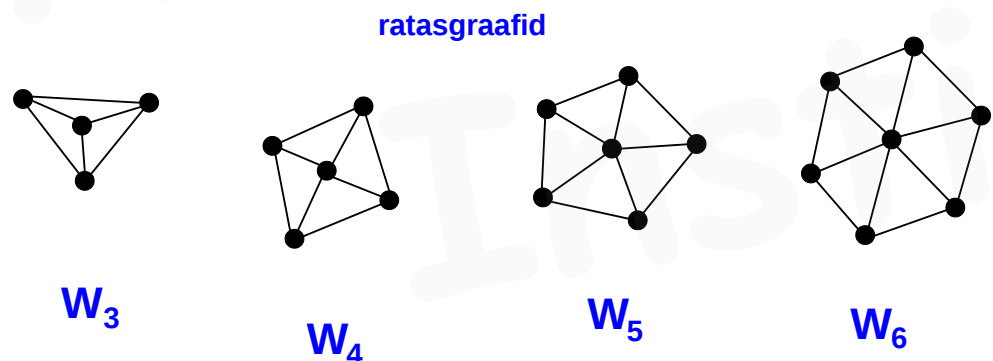
Eemaldades *täielikust* graafist sihipäraselt osa kaari, saame *tsükelgraafi* C_n (ingl. cycle):



Tsükelgraafis on iga tipu **aste** 2 ja tippe on enam kui 2: $n > 2$;

ratasgraaf

Lisades *tsükelgraafi* 1 täiendava *tipu* ja n täiendavat *kaart* (seda uut tippu ühendama *tsükelgraafi* iga tipuga) — saame *ratasgraafi* W_n (ingl. wheel):



Ilmne, et *ratasgraafis* üks *tipp* omab *astet* $(n-1)$ ja kõikidel ülejäänud tippudel on *aste* 3

Kahealuseline graaf

Graaf on **kahealuseline**, kui tema kõik tipud jagunevad kaheks *mittelõikuvaks* osahulgaks selliselt, et graafi iga kaar seob ühe osahulga mingit tippu teise osahulga mingi tipuga:



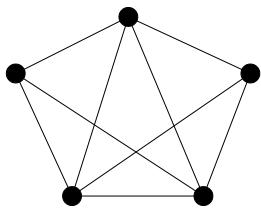
Graaf G_1 osutub *kahealuseliseks*, kuna iga ta kaar seob tippu hulgast $\{a, b, d\}$ tipuga hulgast $\{c, e\}$. Sama osahulga tippude vahel ühtki kaart pole.

Graaf G_2 on samuti kahealuseline. Vastavad *mittelõikuvad* tippude osahulgad on $\{a, b, c\}$ ja $\{d, e\}$

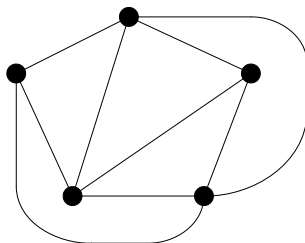
Tasandiline graaf

NB! Kuigi *graaf* on alati joonistatud *tasandile* ehk 2-mõõtmelisse ruumi, siis termin "*tasandiline graaf*" lisab graafi joonisele veel ühe lisanõude:

Graaf on **tasandiline**, kui ta on paigutatav *tasandile* (ehk on joonistatav) selliselt, et ta kaared *ei lõiku* (s.t. kaared "kohtuvad" ainult *tippudes*).



Tasandiline graaf G



Graafi G mittelõikuv kaartepaigutus

Pane tähele, et graaf on **tasandiline** ka siis, kui ta on parajasti ülesjoonistatud lõikuvate kaartega — kuid needsamad lõikuvad kaared $s a a v a d$ olla joonistatud / paigutatud ka *mittelõikuvatena*.

See näide võib tekitada küsimuse :



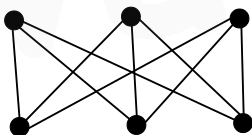
kas **igat** graafi on võimalik joonistada / paigutada 2-mõõtmelises ruumis (ehk *tasandil*) nii, et tema **kaared ei lõiku** ?

Ei.

Kui suudame paigutada mingi graafi (joonise) selliselt, et ta kaared *ei lõiku* — siis sellega ongi tõestatud, et see konkr. graaf on **tasandiline**.

Kuid palju raskem on äratunda / kinnitada, et graaf **ei ole** *tasandiline*.

Vaatleme järgnevat *kahealuselist* graafi :



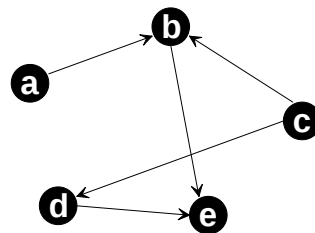
kahealuseline graaf, mis **POLE** tasandiline

Seda graafi ei õnnestu joonistada / paigutada ilma kaarte lõikumisteta.

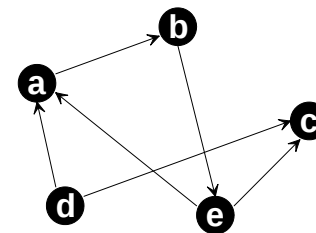
Orienteeritud graafi $G = (T, K)$ baas B on selline **minimaalne** tippude osahulk $B \subset T$, kus hulga B tippudest leidub tee selle graafi mistahes teise tipuni (ehk graafi iga tipp on baasist saavutatav).

Osadest baasi tippudest leidub tee graafi osade tippudeni ja teistest baasi tippudest leidub tee muude tippudeni, kuid kõigi baasikuuluvate tippude peale kokku leidub tee graafi iga tipuni.

Oluliseks osutub just *minimaalne* selline hulk, sest võttes osahulga B koosseisu kõik graafi tipud: $B = T$, on sellisest "baasist" B kõik tipud kindlasti saavutatavad.



graaf G_1



graaf G_2

Graafi G_1 baas on $B = \{a, c\}$

Graafi G_2 baas on $B = \{d\}$

Graafi $G = (T, K)$ **sõltumatute tippude hulk** S on graafi tippude selline osahulk $S \subset T$, kus suvalised 2 tippu hulgas S pole graafil kaarega seotud. Graafi *sõltumatute tippude hulga* leidmisel on tavaliselt eesmärgiks leida *maksimaalne* selline hulk konkreetse graafi jaoks. Graaf võib omada mitmeid erinevaid sõltumatute tippude hulki.

Graafi G_1 maksimaalne sõltumatute tippude hulk on $S = \{a, c, e\}$

Graafi G_2 maksimaalseteks sõltumatute tippude hulkadeks osutuvad 4 erinevat hulka: $S_1 = \{a, c\}$ $S_2 = \{b, d\}$ $S_3 = \{b, c\}$ $S_4 = \{d, e\}$

Isomorfsed graafid

2 graafi on **isomorfsed**, kui nad täidavad tingimusi :

1. mõlemal graafil on **s a m a p a l j u** *tippe* ja *kaari* ;
2. iga *tipp* esimeses graafis omab ühte **v a s t a v a t** *tippu* teises graafis;
3. iga *kaar* esimeses graafis omab ühte **v a s t a v a t** *kaart* teises graafis, nii et **v a s t a v a d** tipud on ühendatud **v a s t a v a t e** kaartega mõlemas graafis.

Sellisel kombel — *isomorfsed* graafid on justnagu "identsed" "samasugused" graafid, mis võivad omada erinevaid tähistusi tippudel ja kaartel ja kus tipud-kaared tohivad paikneda joonisel erineval kujul (erinevates asukohtades) — kuid rohkem erinevusi *isomorfsetel* graafidel polegi . . .

Graafide jaoks pole defineeritud graafide "võrdsust". Selle asemel on graafide jaoks kehtestatud (olemuselt samaväärse mõistena) **isomorfsus**.



isomorfsed graafid

Eelnevas näites on mõlema graafi tipud samade tähistustega ainult sellepärast, et üks-ühene vastavus nende tippude vahel (ja samuti ka kaarte vahel) oleks ilma otsimata nähtav.

Eelnevalt toodud näites pole graafid mitte ainult isomorfsed, vaid veelgi enam — nad on *samad graafid* : nad erinevad ainult tippude erineva paigutuse poolest graafi joonisel ehk nende 2 graafi näol on tegemist ühe ja sama graafiga.

Meenutame, et graafi joonisel pole kaarte ja tippude paiknemine ehk asukoht oluline — graafis on tähtis see, millised tipud on omavahel seotud kaartega.

Järgnevad 2 graafi on teineteise suhtes *mitteisomorfsed* , kuigi neil on samapalju tippe ja kaari:

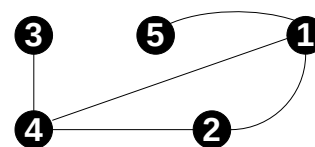


mitteisomorfsed graafid

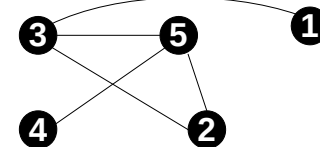


...miks need graafid **pole isomorfsed** ? — püüa kirjeldada?

Orienteerimata graafi **G pöördgraaf** on samade tippudega orienteerimata graaf , mis sisaldab kaari nende tippude vahel, kus graafis **G** pole kaart ja vastupidi: ei oma kaart nende tippude vahel, kus graafis **G** on kaart olemas.



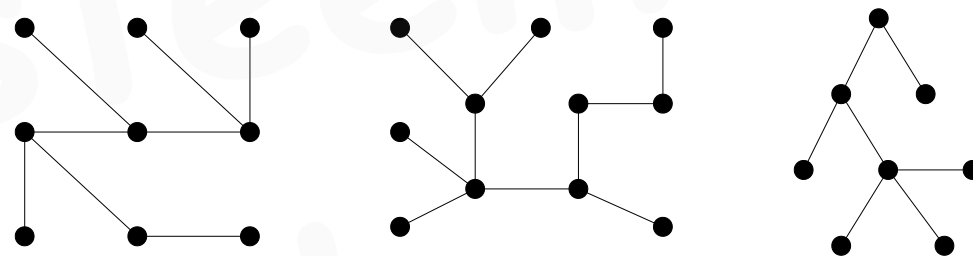
graaf **G**



graafi **G** pöördgraaf

Puud

Puu on *sidus tsükliteta* orienteerimata graaf.



Puud

Kui puul on **n** tippu, siis on tal **(n-1)** kaart.

Kui puus eemaldada üks kaart, siis pole graaf enam sidus ja seega ta pole enam *puu*.

Kui puule lisada üks kaart, siis tekib *tsükkel* ja saadud graaf pole samuti enam *puu*.

Mistahes tippudepaar puus omab täpselt ühte neid ühendavat elementaarahelat.

Kromaatile arv

Graafi värvimine on värvide omistamine graafi tippudele selliselt, et mistahes kaks omavahel kaarega ühendatud tippu oleksid erinevat värvi. Seega "naabertippud" "värvitakse" graafis erinevalt.

Graafi **kromaatile arv** on minimaalne arv, mis näitab, mitme erineva värviga õnnestub graafi tipud värvida selliselt, et naabertipud oleksid erinevat värvi.

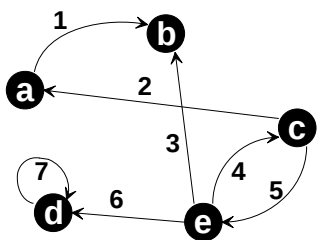
Kromaatile arv 1 on ainult tühjal graafil. (Ilma ühegi kaareta graaf.)
Kahealuselise graafi kromaatile arv on 2 ja samuti vastupidi: kui graafi kromaatile arv on 2, siis on see graaf kahealuseline.

Graafide esitusviisid

Visuaalselt parim graafi esitusviis on "graaf ise" ehk graafi *joonis*. Kõik eelnevad näited graafidest on esitatud ainult graafide joonistena. Joonis on graafi "vahetu" esitus, mis annab meile temast parima ülevaate. Kuigi graafimudelite koostamisel eelistame luua nad algselt joonistena, sobib arvutis esitada graafe ka tabelisse (maatriksisse) organiseeritud viisidel.

Naabusmaatriks (Lähedusmaatriks)

Vaatleme kõige esimeses näites olnud orienteeritud graafi:



orienteeritud graaf G

	a	b	c	d	e
a	0	1	0	0	0
b	0	0	0	0	0
c	1	0	0	0	1
d	0	0	0	1	0
e	0	1	1	1	0

graafi G naabusmaatriks

Graafi *naabusmaatriks* ehk *lähedusmaatriks* on kahendtäitega ruutmaatriks, kus nii read kui ka veerud vastavad graafi tippudele. Naabusmaatriksi element 1 näitab, et sellele *reale* vastavast tipust on graafis kaar sellele *veerule* vastavasse tippu.

Maatriksielement 0 näitab kaare puudumist nende tippude vahel.

Intsidentsusmaatriks

Graafi *intsidentsusmaatriksi* ridadele vastavad graafi tipud ja veergudele vastavad graafi kaared. Maatriksielement 1 tähistab suunatud kaare saabumist sellesse tippu ning element -1 märgib sellest tipust väljuvat kaart.

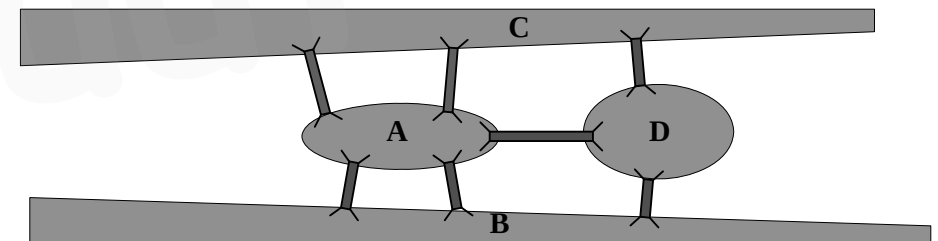
	1	2	3	4	5	6	7
a	-1	1	0	0	0	0	0
b	1	0	1	0	0	0	0
c	0	-1	0	1	-1	0	0
d	0	0	0	0	0	1	?
e	0	0	-1	-1	1	-1	0

graafi G intsidentsusmaatriks

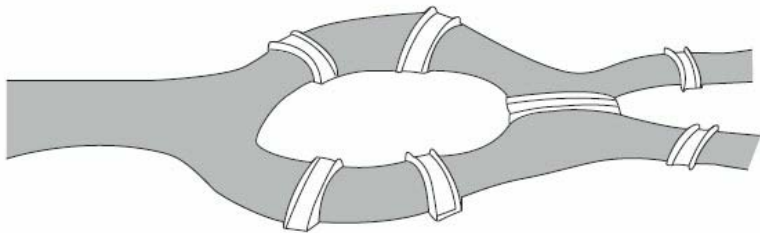
Graafiteooria klassikalisi ülesandeid

Königsbergi sillad

Graafiteooria alguseks loetakse 1736. a. ilmunud Leonhard Euler'i artiklit graafidest, milles ta kirjeldab nn. *Königsbergi sildade ülesannet*. Selles linnas (praegune Kaliningrad) asuvad jões 2 saart, mis on nii jõekallastega kui ka omavahel sildadega ühendatud:

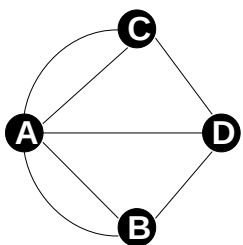


Königsbergi sillad

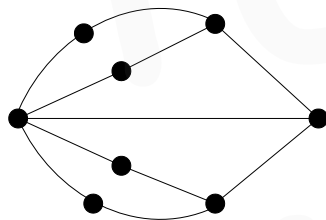


Püstitati küsimus: kas on võimalik ületada kõik sillad täpselt 1 kord, jõudes seejärel tagasi jalutuskäigu alguspunkti ?

Koostame Königsbergi sildade graafmudeli, võttes sillad graafi kaarteks ja saared-jõekaldad graafi tippudeks:



sildade graafmudel
multigraafina



multigraafile vastav
graaf

Kordsete kaartega graafi nimetatakse **multigraafiks**.

Esmane graafmudel Königsbergi sildadele ongi multigraaf. Multigraafi saab ümber kujundada "tavaliseks" graafiks lihtsa tippude lisamisega, kusjuures selliselt muudetud graaf sobib endiselt vaadeldava koha graafmudeliks.

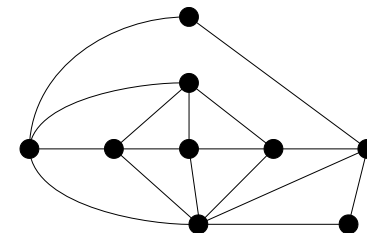
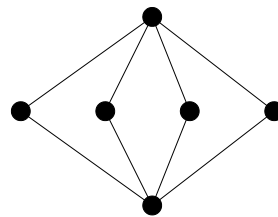
Sildade läbimise probleem viib mõisteni *Euleri tsükkel*.

Eelnevalt oleme defineerinud, et **tsükkel** algab ja lõpeb sama s tipus.

Euleri tsükkel

meenutame:

Euleri tsükkel läbib graafi kõik kaared täpselt ühe korra.



veelkord : Euleri tsükliga graafid

Euleri tsükkel tohib mistahes konkreetset tippu läbida mitu korda.

Kuna iga kaar peab olema ühendatud kuhugi tippu, siis "kõikide kaarte läbimine" tähendab, et *Euleri tsükkel* läbib ka kõik kaared (vähemalt korra).

Euleri graafi tunnus:

sidus graaf osutub **Euleri graafiks**, kui tema kõikide tippude aste on paarisarvuline (ehk graafi kõik tipud on paaristipud).

Mõlemal *Euleri graafi* eelneval näidisel leidub palju "liikumisteid" (ahelaid) mingist tipust samasse tippu tagasi, mis läbib graafi iga kaare täpselt 1 kord. (Osa tippu läbib *Euleri tsükkel* korduvalt.) Võime äratunda, et *Euleri* tsükli läbimisel tuleb igasse tippu siseneda ja sealt väljuda sama arv kordi — siit saame tippude paarisarvulise astme nõude.

Kui graafil on *Euleri tsükkel* olemas, siis võib tema algustipuks valida graafi suvalise tipu (mis osutub samas ka tsükli lõpptipuks).

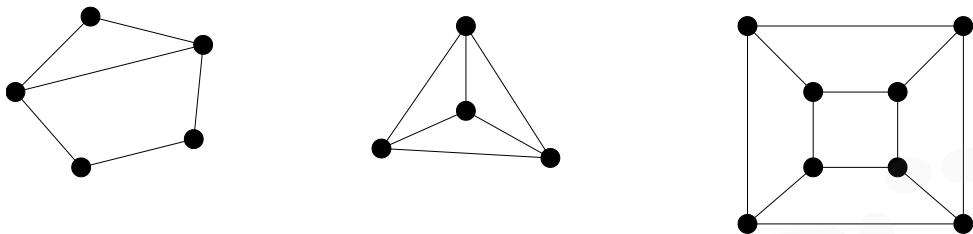
Königsbergi sildade ühekordse läbimise ülesanne osutub *Euleri tsükli* leidmise ülesandeks nende graafmudelil.

Königsbergi sildade graafmudeli jaoks — ei ole *Euleri tsükli* olemas.

Kuna *Euleri tsükkel* leidis ainult sellisel graafil, kus kõikide tippude aste on paarisarvuline, siis võime graafmudeli põhjal veenduda sildade sellise läbimise võimatuses, kuna graafil leidub 4 paaritu arvu astmega (ehk paaritut) tippu.

Hamiltoni tsükkel

Hamiltoni tsükkel läbib **kõik tipud** täpselt **ühe korra** (välja arvatud tsükli esimene ja viimane tipp — mis on sama tipp)



veelkord : **Hamiltoni tsükliga** graafid

Hamiltoni tsükkel ei läbi graafi **kõiki kaari** — ta läbib ainult need **kaared**, mis on vajalikud kõikide **tippude** läbimiseks.

Erinevalt *Euleri tsüklist* ei ole *Hamiltoni tsükli* olemasolu / puudumise tuvastamise jaoks olemas lihtsaid reegleid.

Rändkaupmehe ülesanne

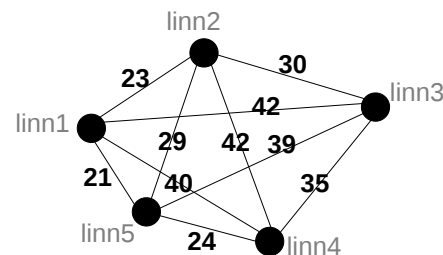
Vaatleme järgmist ülesandepüstitust : **Rändkaupmees** peab külastama **igat linna** **täpselt ühekorra**, pöördudes lõpuks tagasi alguslinna.

Vaja koostada **optimaalseim** linnade läbimise järjestus.

Sellist olukorda kirjeldava *graafmudeli* koostamisel omistame igale linnale graafi **ühe tipu** ja linnadevahelisi ühendusteid esitavad **kaared**.

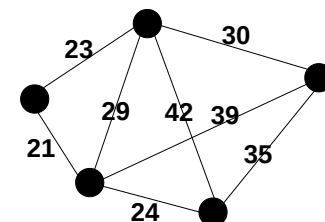
Senistes graafides ei olnud osad **kaared** mitte kuidagi "eelistatumad" teiste kaarte suhtes — ainus oluline karakteristik iga kaare kohta oli: milliseid **tippe** ta ühendab ?

See ülesanne nõuab kaartele uut tunnust: **kaare kaal**, mis omakorda viib **kaaludega graafi** mõisteni : (ingl. *weighted graph*)



(täielik graaf)

kaaludega graafid



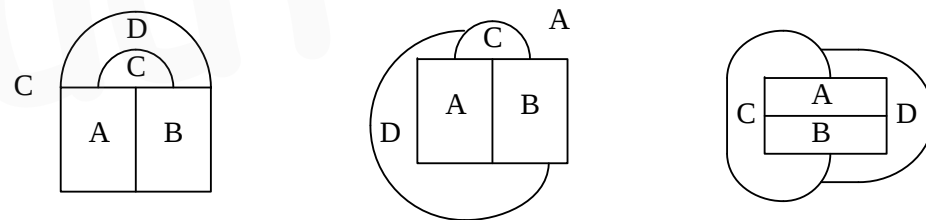
Kaare kaal võib esitada linnadevahelist kaugust — või mistahes "hinda" mis kaasneb selle "kaare läbimisega".

... näiteks "halb tee" või "magine tee" võib omada *graafmudelil* suuremat **kaare kaalu** ...

Kuna ülesandepüstituse kohaselt tuleb läbida kõik linnad (ehk graafmudeli **tipud**) täpselt ühekorra, siis taandub selline ülesanne **Hamiltoni tsükli** leidmise ülesandeks. Seejuures pole mitte mistahes *Hamiltoni tsükkel* parimaks lahenduseks: kui läbi kõikide **tippude** leidub mitmeid erinevaid **kaarte** läbimisjadasid (**tsükleid**), siis minimaalse summaarse kaaluga *Hamiltoni tsükkel* on eelistatud lahend.

Kaardi värvimisülesanne

Poliitilisel kaardil on teatavasti riigid erivärvilised, kusjuures põhinõudeks on **naaberriikide** ehk ühist piiri omavate territooriumite tähistamine **erinevate** värvidega. Kuigi oleme harjunud nägema kaardil palju erinevaid värve, osutub graafiteooria abil tõestatavaks, et erinevate värvide vajalik ja piisav arv kaardi värvimisel on hoopis väiksem.

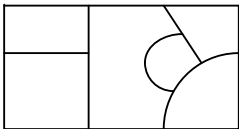


4 värvi hüpoteesi illustreerivad näited

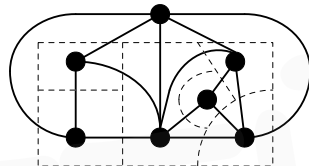
Kuna kaart on naabrusinfot säilitades alati esitatav ka tasandilise graafina, siis järeldub, et mistahes tasandilise graafi *kromaatile* arv on maksimaalselt 4.

Mittetasandilistel graafidel võib *kromaatile* arv olla ka suurem.

Järgnevas näites on tegemist 7 värvitava piirkonnaga, kusjuures seitsmes piirkond on kogu riskülikuväline ala:



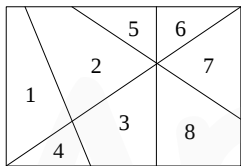
7 värvitava piirkonnaga "kaart"



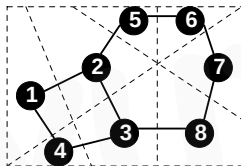
vastav **tasandiline graaf**

Kõik 7 piirkonda on värvitavad 4 värviga.

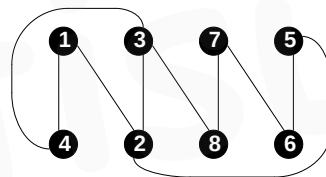
Kui järgneval "kaardil" jätta riskülikuväline piirkond "mittevärvitavaks", siis on naaberpiirkonnad värvitavad ainult kahe värviga ja kaardile vastav tasandiline graaf on seega *kahealuseline*:



8 piirkonnaga "kaart"



vastav **tasandiline graaf**



ümberpaigutatud graaf
(kahealuseline)

Tasandilise graafi tipud on kolmandal joonisel ümberpaigutatud ainult graafi *kahealuselisuse* esiletoomiseks.

Kui värvitavaks piirkonnaks võtta ka riskülikuväline (ehk üheksas) ala, siis on selle värvimiseks vaja kolmandat värvi.

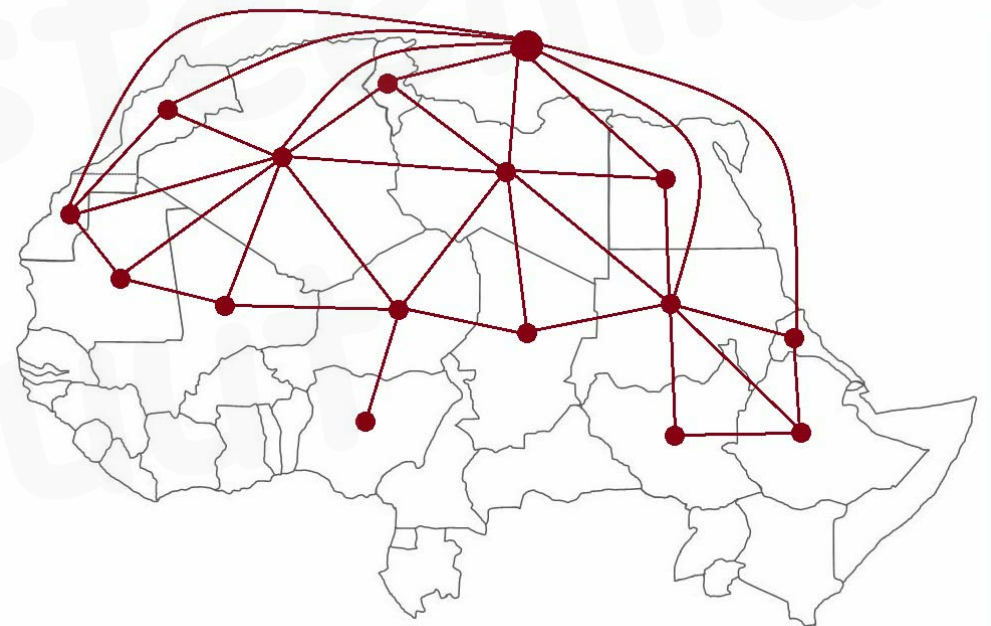
8 piirkonna asemel 9 piirkonnaga kaardile vastav tasandiline graaf on samuti 9 tipuga ja ta pole siis enam *kahealuseline*.

Sellise graafi *kromaatile* arv on 3.

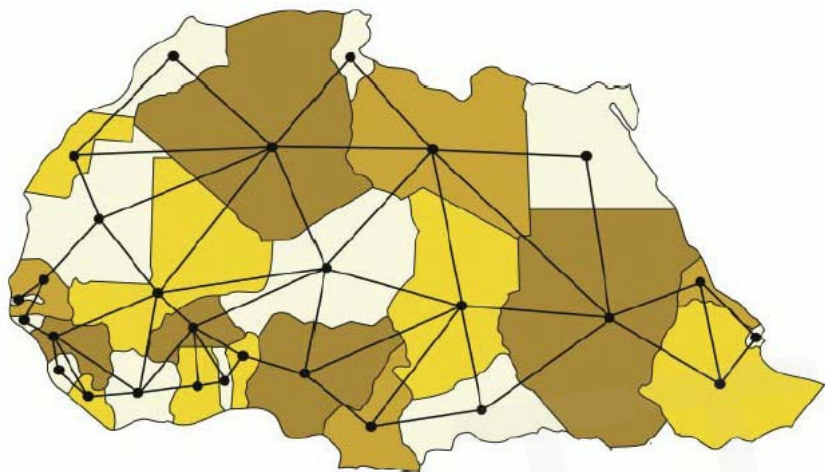
Kaardi värvimisnäide



kaart mis on vaja "värvida"



vastav **tasandiline graaf** kus "väline" piirkond on kah kaasatud (ühe tipuna)
(osaline graafi joonis siin)

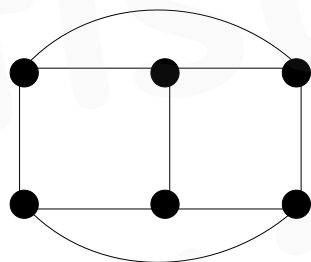
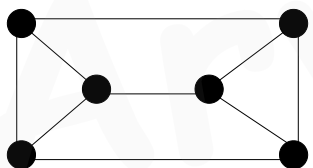


värvivalik kus 5 värvi on TEGELIKULT rakendatud koos ümbritseva valgega
kuid vastav graaf on siin värvitud 4 värviga

ülesanne :



Tuvasta, kas need graafid on isomorfsed ?



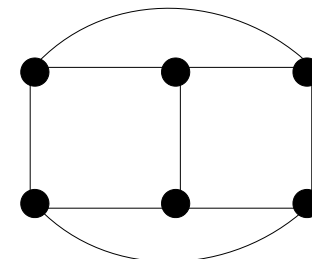
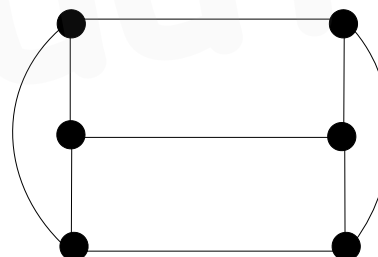
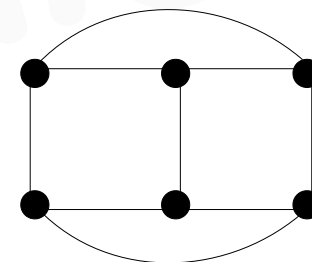
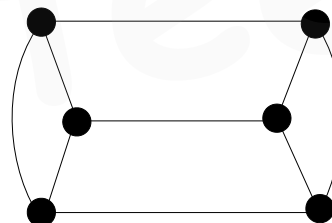
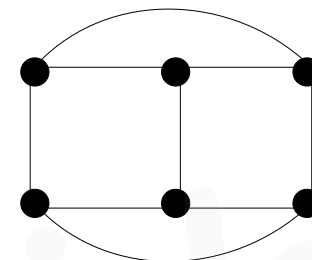
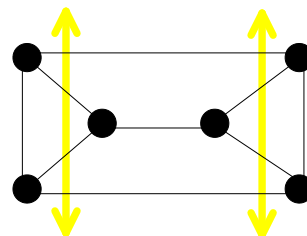
tippe on mõlemal samapalju (6) ;
kaari on mõlemal samapalju (9) ;
vasakul graafil on 6 tippu **astmega 3** (kõik tipud on *astmega 3*)
ja
samuti parempoolsel graafil ;

Seega need graafid saavad olla **isomorfsed**.

Isomorfsuse tõestamise viimane samm oleks näida, et igal *tippul* ja *kaarel* esimeses graafis leidub täpselt üks talle vastav tipp ja graaf teises graafis, nii et vastavad tipud on omavahel seotud vastavate kaartega.

Selle näitamiseks peaksime proovida liigutada / ümber paigutada *tippe* nii, et *kaared* jäävad endiselt "kehtima" ehk jäävad siduma seniseid tippe.

Seljuhul üks graaf visuaalselt "muundub teiseks graafiks" :



JAH need graafid on **isomorfsed**.

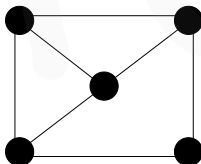
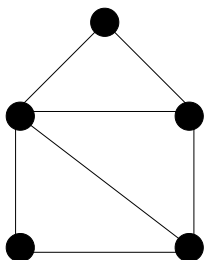
Võime vabalt valida, millised tipud "kolmikus" vastavad teineteisele: graafide joonised on "sümmeetrilised"

_____ /

ülesanne : _____



Tuvasta, kas need graafid on **isomorfsed** ?



sama **tippude** arv (5);

sama **kaarte** arv (7);

AGA

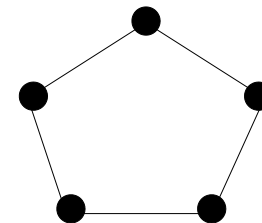
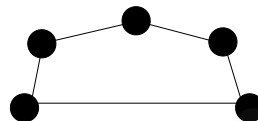
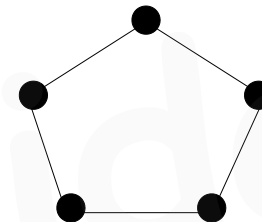
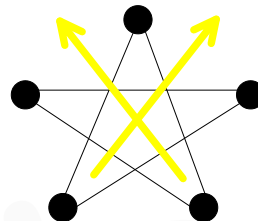
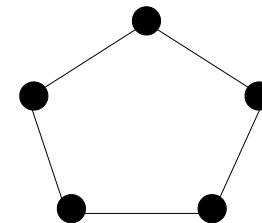
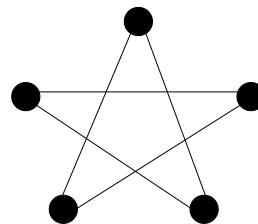
vasakul graafil on olemas tipp **astmega 4** — kuid parempoolses ei leidu tippu astmega 4

Seega — need graafid **POLE isomorfsed**.

ülesanne : _____



Tuvasta, kas need graafid on **isomorfsed** ?



vasak graaf osutub (ümberpaigutades) samuti tsükelgraafiks C_5 — JAH need graafid on **isomorfsed**.



Leonhard **Euler**

(1707 — 1783)



sir William Rowan **Hamilton**

(1805 — 1865)



Augustus **De Morgan**

(1806 — 1871)
