ülesanne:

Leia järgnevale osaliselt määratud 3-muutuja funktsioonile MKNK ja TKNK nii et **TKNK = MKNK** ;
Leia kõik MDNK-d ;
Kas mõni nendest MDNK-dest on juhtumisi selline, mis (loogiliselt) v õ r d u b eelnevalt leitud MKNK-ga ? : **MDNK = MKNK**

f :

$x_1 \backslash x_2x_3$	00	01	11	10
0	—	1	—	0
1	1	0	0	—

osaliselt määratud funktsiooni tõeväärtustabel kaardil

MKNK :

f :

$x_1 \backslash x_2x_3$	00	01	11	10
0	—	1	—	0
1	1	0	0	—

ainus parim kontuuridevalik MKNK jaoks

$$f_{\mathrm{MKNK}} = \bar{x}_2(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3)$$

. . . sama funktsiooni TKNK mis oleks **v õ r d n e** MKNK-ga ?

f :

$x_1 \backslash x_2x_3$	00	01	11	10
0	—	1	—	0
1	1	0	0	—

TKNK jaoks 1-ruudulised kontuurid nii et TKNK = MKNK

. . . et kehtiks **TKNK = MKNK** peab TKNK võtma *nullideks* s a m a d määramatuse ruudud, mille võttis *nullideks* ka MKNK

$$f_{\mathrm{TKNK}} = (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)$$

MDNK :
sellel *osaliselt määratud* funktsioonil leidub **4** erinevat MDNK-d :

f :

$x_1 \backslash x_2x_3$	00	01	11	10
0	—	1	—	0
1	1	0	0	—

esimene võimalik kontuuridevalik MDNK jaoks

f :

$x_1 \backslash x_2x_3$	00	01	11	10
0	—	1	—	0
1	1	0	0	—

teine võimalik kontuuridevalik MDNK jaoks

f:

$x_1 \backslash x_2 x_3$	00	01	11	10
0	—	1	—	0
1	1	0	0	—

kolmas võimalik kontuuridevalik MDNK jaoks

f:

$x_1 \backslash x_2 x_3$	00	01	11	10
0	—	1	—	0
1	1	0	0	—

neljas võimalik kontuuridevalik MDNK jaoks

f:

$x_1 \backslash x_2 x_3$	00	01	11	10
0	—	1	—	0
1	1	0	0	—

MDNK = MKNK ainult selle MDNK korral

$$f_{\mathrm{MDNK}} = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_3$$

$$f_{\mathrm{MKNK}} = \bar{x}_2 (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3)$$

ülesanne:

Funktsioonile

$$f = \bar{x}_2 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3$$

. . . oleme varem saanud **tuletise** muutuja x_2 järgi :

$$\frac{\delta f}{\delta x_2} = \bar{x}_1 \bar{x}_3 x_4 \vee x_1 \bar{x}_4 \vee x_3 \bar{x}_4 = f(x_1 x_3 x_4)$$

Kontrollida seda tuletist **Karnaugh' kaardi** abil.

$$f(x_1 x_2 x_3 x_4) = \bar{x}_2 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3$$

taastame selle $f(x_1 x_2 x_3 x_4)$ *tõeväärtusabeli* kaardile :

$x_1 x_2 \backslash x_3 x_4$	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

kuna tähelepanu all on tuletis x_2 järgi :

$$\frac{\delta f}{\delta x_2}$$

. . . siis on olulised kaardipiirkonnad $x_2 = 0$ $x_2 = 1$

$x_1x_2 \backslash x_3x_4$	00	01	11	10	
00	1	0	0	1	$\overline{x}_2$
01	1	1	0	0	x_2
11	0	0	0	0	x_2
10	1	0	0	1	$\overline{x}_2$

$x_1x_2 \backslash x_3x_4$	00	01	11	10	
00	1	0	0	1	$\overline{x}_2$
01	1	1	0	0	x_2
11	0	0	0	0	x_2
10	1	0	0	1	$\overline{x}_2$

kuna definitsiooni kohaselt :

$$\frac{\delta\, \boldsymbol{f}\,(x_1\, x_2\, x_3\, x_4)}{\delta\, x_2} \;=\; \boldsymbol{f}\,(x_1\; \mathbf{0}\; x_3\, x_4) \;\oplus\; \boldsymbol{f}\,(x_1\; \mathbf{1}\; x_3\, x_4)$$

. . . . siis vajame mõlemat *jääkfunktsiooni*

$\boldsymbol{f}\,(x_1\, \mathbf{0}\, x_3\, x_4)$ ja $\boldsymbol{f}\,(x_1\, \mathbf{1}\, x_3\, x_4)$.

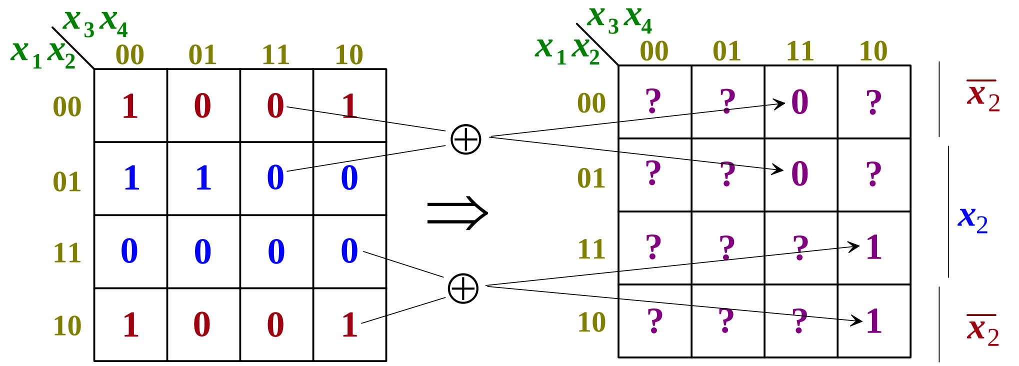
nende *jääkfunktsioonide* tõeväärtustabelid ongi kaardipiirkondades

$x_2 = 0$ $x_2 = 1$

"murrame kokku" kaardi nii, et *piirkond* $x_2 = 0$

oleks katmas *piirkonda* $x_2 = 1$ ja summeerime kattuvate ruutude sisud (ehk *jääkfunktsioonide tõeväärtustabelite* vastavad read) tehtega $\oplus$

kirjutades **mod 2** summa tulemuse m õ l e m a s s e just kokkuliidetud kaardiruutu (senise ruudusisu asemele) :



. . . . kaart täitub sümmeetriliselt piirkondades $x_2 = 0$ $x_2 = 1$

$x_1x_2 \backslash x_3x_4$	00	01	11	10	
00	1	0	0	1	$\overline{x}_2$
01	1	1	0	0	x_2
11	0	0	0	0	x_2
10	1	0	0	1	$\overline{x}_2$

$\Rightarrow$

$x_1x_2 \backslash x_3x_4$	00	01	11	10
00	0	1	0	1
01	0	1	0	1
11	1	0	0	1
10	1	0	0	1

tehtega $\oplus$ nii kokkuliidetud tõeväärtustabelid annavad **tuletise**

$$\frac{\delta\, \boldsymbol{f}}{\delta\, x_2}$$

tõeväärtustabeli, millest saab väljakirjutada tuletise kui $\boldsymbol{f}\,(x_1\, x_3\, x_4)$ MDNK (või MKNK) :

$x_1x_2 \backslash x_3x_4$	00	01	11	10
00	0	1	0	1
01	0	1	0	1
11	1	0	0	1
10	1	0	0	1

. . . kui tõeväärtustabel paikneb sümmeetriliselt piirkondades

$x_2 = 0 \qquad x_2 = 1$

siis x_2 on $f\,(x_1 x_2 x_3 x_4)$ jaoks *mitteoluline muutuja* ega tule sellelt kaardilt väljakirjutatud avaldisse :

$x_1x_2 \backslash x_3x_4$	00	01	11	10
00	0	1	0	1
01	0	1	0	1
11	1	0	0	1
10	1	0	0	1

$$f\,(x_1 x_3 x_4) \;=\; \bar{x}_1 \bar{x}_3 x_4 \;\vee\; x_1 \bar{x}_4 \;\vee\; x_3 \bar{x}_4 \;=\; \frac{\delta f}{\delta x_2}$$

varem olime saanud avaldise teisendamise teel :

$$\frac{\delta f}{\delta x_2} \;=\; \bar{x}_1 \bar{x}_3 x_4 \;\vee\; x_1 \bar{x}_4 \;\vee\; x_3 \bar{x}_4 \;=\; f\,(x_1 x_3 x_4)$$

iseseisev vabatahtlik kodune lahendamine :

Sama funktsiooni jaoks

$$f \;=\; \bar{x}_2 \bar{x}_4 \;\vee\; \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3$$

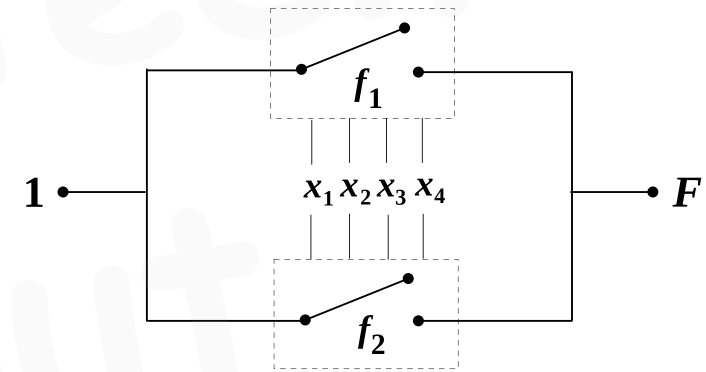
. . . oleme varem saanud **tuletise** muutuja x_3 järgi :

$$\frac{\delta f}{\delta x_3} \;=\; \bar{x}_1 x_2$$

Kontrollida seda tuletist **Karnaugh' kaardi** abil.

ülesanne:

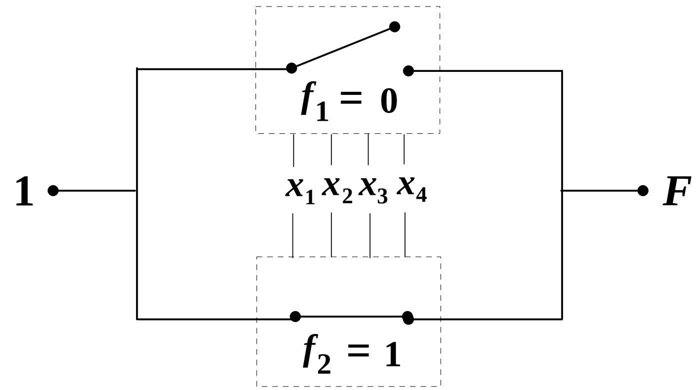
Leia funktsioon f_2 tõeväärtustabelina ja MDNK-na järgneva elektrilülituse jaoks :



f_1 ja f_2 poolt juhitavad / lülitatavad lülitid ("releed")

$f\,(x_1 x_2 x_3 x_4) \;=\; 0$ tähendab, et juhitav lüliti on **k a t k e s t a t u d**

$f\,(x_1 x_2 x_3 x_4) \;=\; 1$ tähendab, et juhitav lüliti on **ü h e n d a t u d**



f_1 ja f_2 poolt juhitavad / lülitatavad lülitid ("releed")

kuna lülitid on p a r a l e e l s e l t , siis nende koostoimet kirjeldav F :

$F\,(x_1 x_2 x_3 x_4) \;=\; \mathbf{1}$ kui vähemalt ü k s lülititest on **ühendatud** ;

$F\,(x_1 x_2 x_3 x_4) \;=\; \mathbf{0}$ kui mõlemad lülitid on **katkestatud** ;

kolmest osalevast funktsioonist on k a k s funktsiooni teada MDNK-dena:

$$f_1\,(x_1 x_2 x_3 x_4) \;=\; \overline{x}_1 \overline{x}_3 x_4 \;\vee\; x_1 x_3 \overline{x}_4 \;\vee\; x_1 x_2 \overline{x}_4$$

$$F\,(x_1 x_2 x_3 x_4) \;=\; x_1 x_2 \;\vee\; \overline{x}_3 x_4 \;\vee\; x_1 x_3$$

vaja on leida :

$$f_2\,(x_1 x_2 x_3 x_4) \;=\; ?$$

. . . ehk teiste sõnadega : milline peab olema otsitav f_2 nii et sellise etteantud f_1 korral oleks F just selline funktsioon, nagu näidatud.

lülititepaari "väljundit" kirjeldav funktsioon F avaldub f_1 ja f_2 kaudu :

$$F \;=\; f_1 \vee f_2$$

Ainuüksi avaldisi F ja f_1 vaadates ei ole võimalik nendest "kohe / otse" teada saada sobiva funktsiooni f_2 avaldist . . . kuid saame t õ e v ä ä r t u s t a b e l e i d *disjunktsiooniga* (ridade kaupa) kokku liites koostada otsitava funktsiooni f_2 **tõeväärtustabeli**.

Tõeväärtustabeleid on mugav vaadata ja töödelda *Karnaugh' kaardil*.

Leiame mõlema teadaoleva funktsiooni *tõeväärtustabeli* kaartidele :

$$f_1\,(x_1 x_2 x_3 x_4) \;=\; \overline{x}_1 \overline{x}_3 x_4 \;\vee\; x_1 x_3 \overline{x}_4 \;\vee\; x_1 x_2 \overline{x}_4$$

x_1x_2 \ x_3x_4	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

f_1

x_1x_2 \ x_3x_4	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

f_2

x_1x_2 \ x_3x_4	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

$$f_1 \;\vee\; f_2 \;=\; F$$

$$F\,(x_1 x_2 x_3 x_4) \;=\; x_1 x_2 \;\vee\; \overline{x}_3 x_4 \;\vee\; x_1 x_3$$

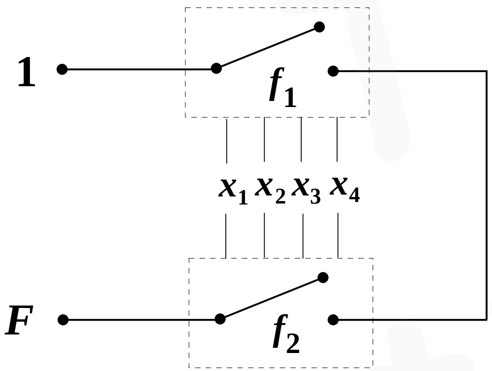
f_2 tõeväärtustabeli koostamisel ilmneb, et see on *osaliselt määratud* funktsioon.

. . . teist **paraleel**lülitit juhtiva funktsiooni f_2 MDNK osutub olema :

$$f_2\,(x_1 x_2 x_3 x_4) \;=\; x_1 x_4$$

ülesanne:

Leia funktsioon f_2 tõeväärtustabelina ja MDNK-na järgneva **jada**-elektrilülituse jaoks :



f_1 ja f_2 poolt juhitavad / lülitatavad lülitid ("releed")

kuna lülitid on j a d a ü h e n d u s e s , siis nende koostoimet kirjeldav F :

$F\,(x_1 x_2 x_3 x_4) \;=\; \mathbf{1}$ kui m õ l e m a d lülitid on **ühendatud** ;

$F\,(x_1 x_2 x_3 x_4) \;=\; \mathbf{0}$ kui vähemalt ü k s lülititest on **katkestatud** ;

kolmest osalevast funktsioonist on k a k s teada :
kuigi etteantud funktsioonide avaldised on samad — nad on vahetanud oma "rollid" :

$$f_1\,(x_1 x_2 x_3 x_4) \;=\; x_1 x_2 \;\vee\; \bar{x}_3 x_4 \;\vee\; x_1 x_3$$

$$F\,(x_1 x_2 x_3 x_4) \;=\; \bar{x}_1 \bar{x}_3 x_4 \;\vee\; x_1 x_3 \bar{x}_4 \;\vee\; x_1 x_2 \bar{x}_4$$

. . . jälle on vaja leida :

$$f_2\,(x_1 x_2 x_3 x_4) \;=\; ?$$

. . . ehk teiste sõnadega : milline peab olema otsitav f_2 nii et sellise etteantud f_1 korral oleks (lülitite **jadaühenduse** korral) lülitite koostoimet kirjeldav F just selline funktsioon, nagu näidatud.

lülititepaari "väljundit" kirjeldav funktsioon F avaldub nüüd f_1 ja f_2 kaudu :

$$F \;=\; f_1 \;\wedge\; f_2$$

t õ e v ä ä r t u s t a b e l e i d *konjunktsiooniga* (ridade kaupa) kokku korrutades saame koostada otsitava funktsiooni f_2 **tõeväärtustabeli**.
Mõlema teadaoleva funktsiooni *tõeväärtustabelid* on eelmises ülesandes juba taastatud kaartidele :

$$f_1\,(x_1 x_2 x_3 x_4) \;=\; x_1 x_2 \;\vee\; \bar{x}_3 x_4 \;\vee\; x_1 x_3$$

x_1x_2 \ x_3x_4	00	01	11	10
00	0	1	0	0
01	0	1	0	0
11	1	1	1	1
10	0	1	1	1

f_1

x_1x_2 \ x_3x_4	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

f_2

$x_1x_2 \backslash x_3x_4$	00	01	11	10
00	0	1	0	0
01	0	1	0	0
11	1	0	0	1
10	0	0	0	1

$$f_1 \wedge f_2 = F$$

$$F(x_1 x_2 x_3 x_4) = \bar{x}_1 \bar{x}_3 x_4 \vee x_1 x_3 \bar{x}_4 \vee x_1 x_2 \bar{x}_4$$

$x_1x_2 \backslash x_3x_4$	00	01	11	10
00	0	1	0	0
01	0	1	0	0
11	1	1	1	1
10	0	1	1	1

f_1

$x_1x_2 \backslash x_3x_4$	00	01	11	10
00	—	1	—	—
01	—	1	—	—
11	1	0	0	1
10	—	0	0	1

f_2

. . . teist **jada**lülitit juhtiva funktsiooni f_2 MDNK osutub olema :

$$f_2(x_1 x_2 x_3 x_4) = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_4$$

HULGAD

Hulgaaritmeetilised tehted

Hulgaalgebra (Cantor'i algebra)

. . . . **Hulk** on koosvaadeldavate hulga**elementide** kogum . . . .

(hulk koosneb **elementidest**)

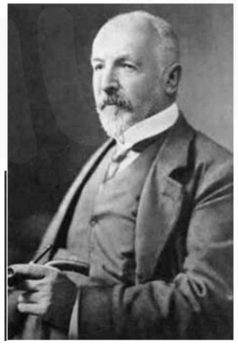
Hulgas ei ole korduvaid elemente: igat hulgaelementi on "**1 tk**."

Hulkade jaoks on defineeritud **5** hulgaaritmeetilist tehet.

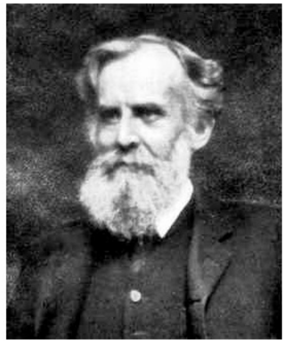
1 *unaarne* ja 4 *binaarset* tehet :

tehte NIMI	formaalne tähistus
hulga **täiend**	$\overline{A}$
hulkade **ühend** (hulkade **liitmine**)	$A \cup B$
hulkade **ühisosa** (hulkade **korrutamine**)	$A \cap B$
hulkade **vahe** (hulkade **lahutamine**) "A *ilma* B-ta"	$A \setminus B$
hulkade **sümmeetriline vahe**	$A \vartriangle B$

Hulgatehete tulemuseks on samuti **hulk**.



Georg **Cantor** (1845 — 1918)



John **Venn** (1834 — 1923)