

$$x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 =$$

$$= x_1 x_2 x_3 x_4 \oplus x_1 x_2 x_4 \oplus x_1 x_2 \oplus x_1 x_3 x_4 \oplus x_1 x_3 \oplus x_1 x_4 \oplus x_1 \oplus x_2 x_3$$

LOOGIKAELEMENDID digitaalskeemides / digitaallülitustes

Digitaalskeemides on lubatud ühendusliinidel ainult 2 erinevat signaalnivood, mida tähistatakse samamoodi nagu ka loogikaväärtusi: 0 1

Neid (digitaal)signaale töödeldakse meile tuttavate loogikatehetega.

Loogikatehteid teevad skeemides loogikaelemendid.

Joonistatud loogikaskemides tähistatakse loogikaelemente nende tingmärkidega:

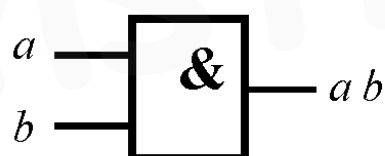
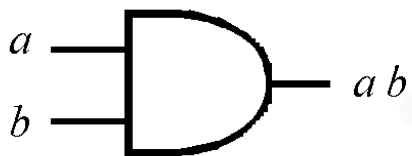
1. invertor ("EI-element"):



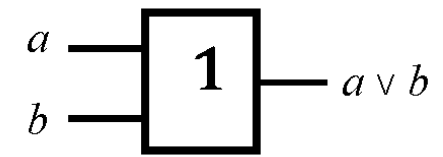
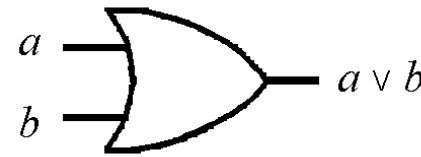
... lihtsaim loogikaelement: ainus ühe sisendiga loogikaelement.

ülejäänud loogikaelementidel on vähemalt 2 sisendit:

2. JA-element (AND-element) teeb loogikatehet konjunktsioon:



3. VÕI-element (OR-element) teeb loogikatehet disjunktsioon:

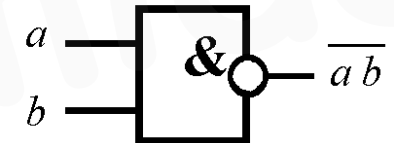


... eelnevad 3 loogikaelementi on lihtloogikaelemendid: nad teevad elementaarseid loogikatehteid.

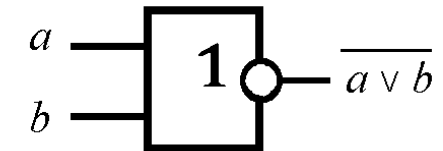
Lisaks nendele on olemas 2 loogikaelementi, mis teevad **inverteeritud** elementaarseid loogikatehteid.

Neid võib vaadelda elementidena, mis teevad "2 loogikatehet järjest":

4. JA-EI-element (NAND-element) teeb "kombineeritud loogikatehet" konjunktsiooni inversioon:



5. VÕI-EI-element (NOR-element) teeb "kombineeritud loogikatehet" disjunktsiooni inversioon:



tingmärkidel on näha, et r õ n g a s tingmärgi küljes tähendab *inversiooni*

ülesanne:

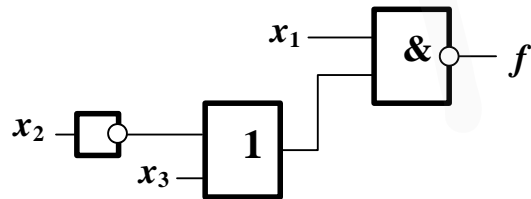


Koosta /joonista selle **avaldise** jaoks talle vastav **digitaalskeem**
(ehk *füüsiline mudel* sellele *matemaatilistele mudelile*):

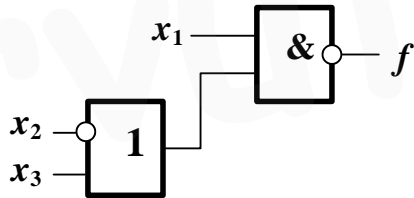
$$f = \overline{x_1(\bar{x}_2 \vee x_3)}$$



see *loogikaavaldis* realiseerub sellise *digitaalskeemina*:



sisendsignaali eelnev **inverteerimine** saab olla tähistatud ka
"inversioonirõngaga" elemendi sisendil:



ülesanne:

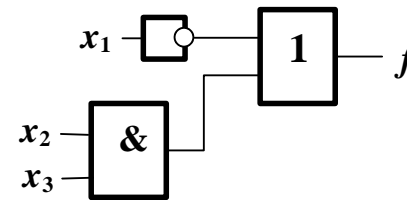


Koosta /joonista selle MDNK ja TDNK jaoks nende
loogikaavaldistele vastavad **digitaalskeemid**
(ehk *füüsilised mudelid* nendele *matemaatilistele mudelitele*):

$$f(x_1 x_2 x_3) = \bar{x}_1 \vee x_2 x_3$$

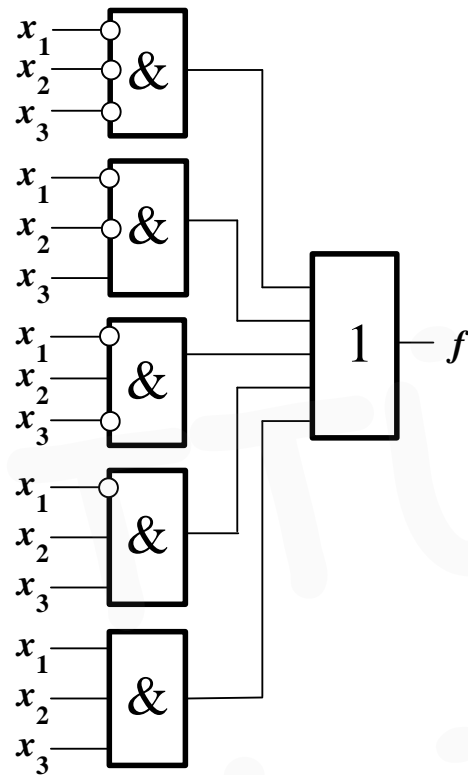
$$f(x_1 x_2 x_3) =$$

$$= \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1 x_2 x_3$$



$$f(x_1 x_2 x_3) = \bar{x}_1 \vee x_2 x_3$$

$$\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1 x_2 x_3$$



$$\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1 x_2 x_3$$

mõlemad eelnevad digitaalskeemid on funktsionaalselt võrdväärsed kuna skeemideks joonistatud MDNK ja TDNK on võrdsed teineteisega.

Loogikaavaldiste esitamine kujul JA-EI (NAND)

$$\{ f_{14} \} \text{ ehk } \{ \bar{\&} \}$$

suvalist loogikaavaldist on võimalik esitada kujul, mis sisaldab ainult ühesuguseid tehteid: JA-EI ehk NAND-tehteid

Kõikide 2-muutuja funktsioonide $f_0 \dots f_{15}$ hulgas on funktsioon f_{14} mis on konjunktsiooni inversioon (NAND):

| $x_1 x_2$ | f_0 | f_1 | f_2 | f_3 | f_4 | f_5 | f_6 | f_7 |
|-----------|-------|------------------|-----------------------|-------|-----------------------|-------|------------------|----------------|
| 0 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| | 0 | $x_1 \wedge x_2$ | $x_1 \rightarrow x_2$ | x_1 | $x_2 \rightarrow x_1$ | x_2 | $x_1 \oplus x_2$ | $x_1 \vee x_2$ |

| $x_1 x_2$ | f_8 | f_9 | f_{10} | f_{11} | f_{12} | f_{13} | f_{14} | f_{15} |
|-----------|----------------|---------------------------|-------------|-----------------------|-------------|-----------------------|------------------|----------|
| 0 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| | $x_1 \vee x_2$ | $x_1 \leftrightarrow x_2$ | \bar{x}_2 | $x_2 \rightarrow x_1$ | \bar{x}_1 | $x_1 \rightarrow x_2$ | $x_1 \wedge x_2$ | 1 |

NAND

NAND-kujuline logikaavaldis saadakse DNK topeltinversiooni kaudu :

$$\{ \bar{\&} \} \Leftrightarrow \overline{\overline{\&}}$$

(DNK võiks seejuures olla eelistatult MDNK)

topeltinversioon ei muuda avaldise väärtust, kuid võimaldab avaldise teisendada teistsugusele (samaväärsele) kujule :

topelteilus : $\bar{\bar{x}} = x$

rakendades topeltinversiooni alumisele inversioonijoonele DeMorgani seadust :

DeMorgan'i seadused :

(2 muutuja jaoks)

$$\overline{x \vee y} = \bar{x} \bar{y}$$

$$\overline{x y} = \bar{x} \vee \bar{y}$$

... teisendub topeltinverteeritud DNK kujule NAND (kus avaldises sisalduvad ainult NAND-tehted)

ülesanne:



Esita DNK-avaldis

$$f(x_1 x_2 x_3) = x_1 \bar{x}_2 \vee x_3 \quad \text{kujul | baasis } \{ \& \} \quad (\text{NAND})$$

ja koosta NAND-avaldisele vastav NAND-elementidega loogikaskeem.



NAND-avaldis saadakse DNK-st. Etteantud avaldis ongi juba DNK — seega saab kohe jätkata topeltinversiooni rakendamisele :

$$f(x_1 x_2 x_3) = x_1 \bar{x}_2 \vee x_3 = \overline{\overline{x_1 \bar{x}_2 \vee x_3}} = \overline{\overline{x_1 \bar{x}_2} \cdot \overline{x_3}} = \dots$$

... "poolitades" alumiise inversioonijooni DeMorgani seadusega :

$$\dots = \overline{\overline{x_1 \bar{x}_2} \cdot \overline{x_3}} = \overline{\overline{x_1 \bar{x}_2} \vee \overline{\overline{x_3}}} = \overline{\overline{x_1 \bar{x}_2} \vee x_3}$$

... olemegi saanud loogikaavaldise, kus kõik olemasolevad konjunktsioonid on järgnevalt inverteeritud.



... !? NAND-avaldisekujus on lubatud ainult NAND-tehted ?

aga siin avaldises on olemas ka üksikud inverteeritud algtermid \bar{x}_2 ja \bar{x}_3 ? Kas selline avaldis on ikka NAND-kujuline ?



... see "probleem" laheneb kergesti :

idempotentsus :

$$x \cdot x = x$$

$$x \vee x = x$$

$$x_2 = x_2 x_2$$

... võrdus jääb kehtima, kui mõlemaid pooli inverteerida :

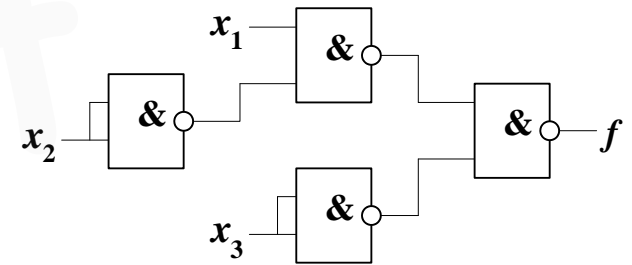
$$\bar{x}_2 = \overline{x_2 x_2}$$

seega saab üksikud inverteeritud algtermid asendada inverteeritud konjunktsioonidega (NAND) :

$$\dots = \overline{\overline{x_1 x_2} \cdot \overline{x_3}} = \overline{\overline{x_1 x_2 x_2} \cdot \overline{x_3 x_3}}$$

NAND-kujulise avaldisega saab teostada loogikaskeemina, mis koosneb ainult NAND-loogikaelementidest :

$$f(x_1 x_2 x_3) = \overline{\overline{x_1 x_2} \cdot \overline{x_3}}$$



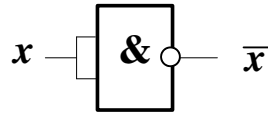
vastav NAND-skeem avaldisele :

$$\overline{\overline{x_1 x_2} \cdot \overline{x_3}}$$

juhindudes võrdusest :

$$\bar{x} = \overline{x x}$$

... saab NAND-elementi lülitada töötama **invertorina** :



NAND element
rakendatud / ühendatud INVERTORINA

$$f(x_1 x_2 x_3) = \overline{x_1 \bar{x}_2 \cdot x_3}$$



... mis juhtub kui ÜLEMINE pikk inversioon samuti "tükeldada" *DeMorgan'i seadusega* ?

selleks saaks rakendada *DeMorgan'i seaduse* varianti :

$$\overline{x y} = \bar{x} \vee \bar{y}$$

$$f(x_1 x_2 x_3) = \overline{x_1 \bar{x}_2 \cdot x_3} = \overline{x_1 \bar{x}_2} \vee \bar{x}_3 = \overline{x_1 \bar{x}_2} \vee \bar{x}_3$$

ülemise pika inversiooni "tükeldamine" viib avaldise tagasi DNK-ks :

$$\{\bar{\&}\} \iff \overline{\text{DNK}}$$

Loogikaavaldiste esitamine kujul VÕI-EI (NOR)

$$\{f_8\} \quad \text{ehk} \quad \{\bar{\vee}\}$$

| $x_1 x_2$ | f_0 | f_1 | f_2 | f_3 | f_4 | f_5 | f_6 | f_7 |
|-----------|-------|------------------|----------------------------------|-------|----------------------------------|-------|------------------|----------------|
| 00 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 01 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 10 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 11 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| | 0 | $x_1 \wedge x_2$ | $\overline{x_1 \rightarrow x_2}$ | x_1 | $\overline{x_2 \rightarrow x_1}$ | x_2 | $x_1 \oplus x_2$ | $x_1 \vee x_2$ |

| $x_1 x_2$ | f_8 | f_9 | f_{10} | f_{11} | f_{12} | f_{13} | f_{14} | f_{15} |
|-----------|---------------------------|---------------------------|-------------|-----------------------|-------------|-----------------------|-----------------------------|----------|
| 00 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 01 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 10 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 11 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| | $\overline{x_1 \vee x_2}$ | $x_1 \leftrightarrow x_2$ | \bar{x}_2 | $x_2 \rightarrow x_1$ | \bar{x}_1 | $x_1 \rightarrow x_2$ | $\overline{x_1 \wedge x_2}$ | 1 |

NOR

NAND

NOR-avaldis on *duaalne* NAND-avaldise suhtes; tema saamise sammud on samuti *duaalsed* eelpool läbitud NAND-avaldise leidmise suhtes.

NOR-avaldise leidmiseks tuleb alustada *konjunktiivsest normaalkujust* KNK (KNK võiks seejuures olla eelistatult MKNK)

$$\{\bar{\vee}\} \iff \overline{\text{KNK}}$$

KNK-le rakendatakse *topeltinversiooni* koos järgneva *DeMorgani seaduse* rakendamisega alumiiselle pikale inversioonijoonel.

ülesanne: -----



Esita DNK-avaldis

$$f(x_1x_2x_3) = x_1\bar{x}_2 \vee x_3 \quad \text{kujul | baasis } \{\vee\} \quad (\text{NOR})$$

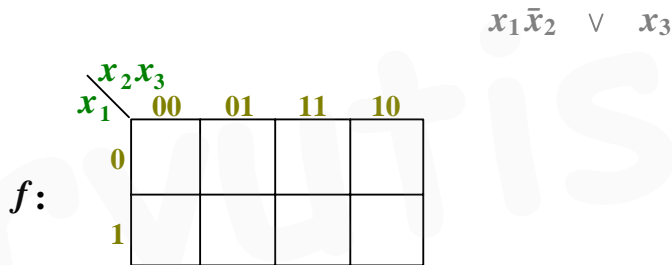
ja koosta NOR-avaldisele vastav NOR-elementidega loogikaskeem.



NOR-avaldis saadakse **KNK**-st, kuid etteantud avaldis on DNK.

Esmalt on vaja leida antud DNK-ga võrdne KNK — mida saame leida *Karnaugh' kaardi* abil.

Selleks taastame antud DNK-avaldisse järgi tema **1**-de kontuurid kaardile :



olles DNK-st tuvastanud **1**-de ruudud ehk **1**-de piirkonna, saame samas ka teada **0**-de piirkonna — millest omakorda selgub **KNK** (MKNK) :



DNK 1-de kontuurid ... selgitavad 0-de piirkonna kaudu MKNK

normaalkujude teisendamine üksteiseks Karnaugh' Kaardil

NOR-kujuni teisendamine:

leitud MKNK-le rakendame *topeltinversiooni* + *DeMorgani seadust* :

$$f(x_1x_2x_3) = \overline{\overline{(x_1 \vee x_3)(\bar{x}_2 \vee x_3)}} = \overline{x_1 \vee x_3 \vee \bar{x}_2 \vee x_3}$$

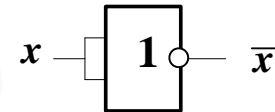
... tekkis avaldis, kus kõik *konjunktsioonid* on kadunud ja asemele on tekkinud ainult *disjunktsiooni inversioonid* ;

üksiku invertteeritud *alstermi* \bar{x}_2 saab kah asendada NOR-tehteks :

idempotentsus : $x \vee x = x$ $x \cdot x = x$

$$\bar{x}_2 = \overline{x_2 \vee x_2}$$

... ilmneb, et NOR-element saab kah olla lülitatud toimima **invertorina** :



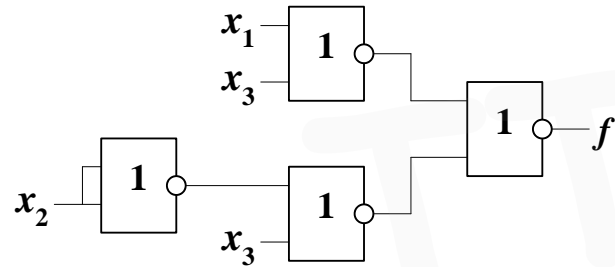
NOR-element

rakendatud / lülitatud INVERTORiks

Saadud NOR-avaldisse saab realiseerida *digitaalskeemina*, mis koosneb ainult ühte tüüpi loogikaelementidest — NOR-elementidest :

Ka kõik üksiku algtermi *inversioonid* (mis leiduvad NOR-loogikaavaldises) teostatakse samuti NOR-elementidena (kuna *invertorid* ise pole lubatud NOR-skeemis).

$$f(x_1x_2x_3) = \overline{x_1 \vee x_3 \vee \bar{x}_2 \vee x_3}$$



digitaalskeem ainult NOR-elementidel

mis teostab : $\overline{x_1 \vee x_3 \vee \bar{x}_2 \vee x_3}$

iga funktsioon / avaldis saab olla esitatud DNK-avaldisena kui ka KNK-avaldisena;

DNK on edasiteisendatav NAND-avaldiseks;

KNK on edasiteisendatav NOR-avaldiseks;

seega :

iga loogikafunktsioon saab olla realiseeritud **NAND-loogikaskeemina** ;

iga loogikafunktsioon saab olla realiseeritud **NOR-loogikaskeemina** ;

