

$$x \rightarrow y = \bar{x} \vee y \qquad x \leftrightarrow y = \bar{x}\bar{y} \vee xy$$

$$x \oplus y = \bar{x}y \vee x\bar{y}$$

ülesanne: ----- \

Lihtsusta loogikaavaldised

(loogikaalgebra põhiseoste ja asendusseoste abil)



$$\bar{x}_1x_2 \vee \bar{x}_1x_3 \vee x_2 = \dots$$



? ... saaks teisendada: $\dots = \bar{x}_1(x_2 \vee x_3) \vee x_2$

kuid see pole parim võimalus siin avaldises kuna leidub ka neeldumine:



$$\bar{x}_1x_2 \vee \bar{x}_1x_3 \vee x_2 = \bar{x}_1x_3 \vee x_2$$



$$(x_2 \rightarrow \bar{x}_1)x_2 \vee \bar{x}_2 = \dots$$



$$\begin{aligned} \dots &= (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1)x_2 \vee \bar{x}_2 = \\ &= \bar{x}_2x_2 \vee \bar{x}_1x_2 \vee \bar{x}_2 = \\ &= \bar{x}_1x_2 \vee \bar{x}_2 = \\ &= \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \end{aligned}$$



? ... seda avaldist oleks saanud neeldumise abil lihtsustada ka teisiti, veidi lühemalt:

$$\dots = (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1)x_2 \vee \bar{x}_2 =$$

$$= (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1) \vee \bar{x}_2 =$$

$$= \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 =$$

$$= \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1$$



$$x_1(x_1 \leftrightarrow \bar{x}_2) \vee \bar{x}_2 = \dots$$



$$\begin{aligned} \dots &= x_1(\bar{x}_1x_2 \vee x_1\bar{x}_2) \vee \bar{x}_2 = \\ &= x_1\bar{x}_1x_2 \vee x_1x_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_2 = \\ &= x_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_2 = \\ &= \bar{x}_2 \end{aligned}$$



$$\bar{x}_1x_2 \vee x_1x_2 \vee \bar{x}_2 = \dots$$



$$\begin{aligned} \dots &= x_2(\bar{x}_1 \vee x_1) \vee \bar{x}_2 = \\ &= x_2 \vee \bar{x}_2 = \\ &= 1 \end{aligned}$$



? ... aga neeldumisi oleks kah saanud rakendada (sulgude ette toomise asemel) seljuhul oleks algne avaldis teisendunud:

$$\bar{x}_1x_2 \vee x_1x_2 \vee \bar{x}_2 =$$

$$= \bar{x}_1 x_2 \vee x_1 \vee \bar{x}_2 =$$

$$= x_2 \vee x_1 \vee \bar{x}_2 = \dots$$

$$\dots = 1 \vee x_1 = \dots$$

$$\dots = 1$$



? ... no ja veel võimalus: selline **neeldumine** on siin kah saadaval :

$$\dots = \bar{x}_1 x_2 \vee x_1 \vee \bar{x}_2 =$$

$$= \bar{x}_1 \vee x_1 \vee \bar{x}_2 = \dots$$

$$\dots = 1 \vee \bar{x}_2 = \dots$$

$$\dots = 1$$



$$(x_1 \vee \bar{x}_2)(\bar{x}_1 \vee x_2) \vee x_1 \bar{x}_2 = \dots$$



$$\dots = x_1 \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_1 \vee x_1 x_2 \vee \bar{x}_2 x_2 \vee x_1 \bar{x}_2 =$$

$$= \bar{x}_2 \bar{x}_1 \vee x_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_2 = \dots$$

! tüüpiline viga:



Kuigi $\bar{x} \vee x = 1$ ei järeldu sellest, et $\bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee x_1 x_2$ võrduks samuti konstandiga **1**

Seosest $\bar{x} \vee x = 1$ tuleneb: $\overline{x_1 x_2} \vee x_1 x_2 = 1$

kuid $\bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee x_1 x_2 \neq 1$

võime kontrollida : $\bar{x}_1 \bar{x}_2 \neq \overline{x_1 x_2}$

$x_1 x_2$	$\bar{x}_1 \bar{x}_2$	$\overline{x_1 x_2}$
0 0	1	1
0 1	0	1
1 0	... pole enam oluline arvutada pole enam oluline arvutada ...
1 1	... pole enam oluline arvutada pole enam oluline arvutada ...

(meenutame, et $\bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee x_1 x_2 = x_1 \leftrightarrow x_2$)

pane tähele : samal põhjusel $\bar{x}_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_2 \neq 1$



meenutame, et varasemas ülesandes tekkis vahetulemusena avaldis :

$$\dots = x_1(\bar{x}_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_2) \vee \bar{x}_2 = \dots$$

... kus me kah ei asendanud sulgudes olevat avaldist $\bar{x}_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_2$ konstant **1**-ga

... nüüd tagasi poolelioleva teisenduse juurde :

$$\dots = \bar{x}_2 \bar{x}_1 \vee x_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_2 =$$

$$= \bar{x}_2 \bar{x}_1 \vee x_1(x_2 \vee \bar{x}_2) =$$

$$= \bar{x}_2 \bar{x}_1 \vee x_1 =$$

$$= \bar{x}_2 \vee x_1$$

sellel lihtsustamisel saime :

$$(x_1 \vee \bar{x}_2)(\bar{x}_1 \vee x_2) \vee x_1 \bar{x}_2 = \dots = \bar{x}_2 \vee x_1$$

... lahendatud ...



?... või teine tee : sulgude ette oleks saanud tuua ka ühise teguri \bar{x}_2

$$\begin{aligned} \dots &= \bar{x}_2 \bar{x}_1 \vee x_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_2 = \\ &= \bar{x}_2 (\bar{x}_1 \vee x_1) \vee x_1 x_2 = \\ &= \bar{x}_2 \vee x_1 x_2 = \\ &= \bar{x}_2 \vee x_1 \end{aligned}$$

... lahendatud: sama tulemus



Pikkade inversioonide olemus avaldistes

pikk inversioon avaldise mingi osa kohal on samaväärne **sulgudega** selle avaldiseosa ümber:

$$\overline{x_1 x_2 x_3} \equiv (\overline{x_1 x_2}) x_3$$

(... rõhutame, et vastupidine väide ei kehti ehk **sulgude olemasolust** ei järeldu mitte midagi **inversiooni** kohta...)

Lisaks järeljub eelnevast, et avaldise $\overline{x_1 x_2 x_3}$ teisendamisel **DeMorgani seadusega** :

$$\overline{x y} = \bar{x} \vee \bar{y}$$

... tuleb pika inversiooni ära kadumisel avaldisest kohe panna **sulud**, et avaldises säiliks tehete õige järjekord :

$$\overline{x_1 x_2 x_3} = (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2) x_3$$

valesti teisendatud : $\overline{x_1 x_2 x_3} \neq \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 x_3$

ülesanne: -----
Lihtsusta loogikaavaldis
(loogikaalgebra põhiseoste abil)



$$\overline{x_2 x_1 \vee x_3} \vee x_1 x_2 = \dots$$

... loetavuse parandamiseks võime sedasama avaldist esitada ka kujul :

$$\overline{x_2 (x_1 \vee x_3)} \vee x_1 x_2 = \dots$$



$$\begin{aligned} \dots &= x_2 (\bar{x}_1 \bar{x}_3) \vee x_1 x_2 = \\ &= x_2 \bar{x}_1 \bar{x}_3 \vee x_1 x_2 = x_2 (\bar{x}_1 \bar{x}_3 \vee x_1) = \\ &= x_2 (\bar{x}_3 \vee x_1) = x_2 \bar{x}_3 \vee x_2 x_1 \end{aligned}$$

! tüüpiline viga: -----



$$\overline{x_1 x_2 \vee x_3 x_4} \neq \bar{x}_1 \bar{x}_2 \wedge \bar{x}_3 \bar{x}_4$$

DeMorgani seadusest :

$$\overline{x \vee y} = \bar{x} \bar{y} \quad \text{tuleneb :}$$

$$\overline{x_1 x_2 \vee x_3 x_4} = \overline{x_1 x_2} \wedge \overline{x_3 x_4} = \overline{x_1 x_2} \overline{x_3 x_4}$$



iseseisev vabatahtlik kodune lahendamine : -----

Lihtsusta loogikaavaldised

loogikaalgebra põhiseoste ja loogikatehete asendusseoste abil



$$(x_1 \leftrightarrow x_2) \rightarrow x_1 = \dots$$

vastus:

$$\dots = x_1 \vee x_2$$



$$\bar{x}_2(x_1 \vee \bar{x}_2)(x_2 \vee x_3) \vee x_1\bar{x}_2x_3 = \dots$$

vastus:

$$\dots = \bar{x}_2x_3$$

iseseisev vabatahtlik kodune lahendamine:



roheline õpiku lk. 173 kõik muud ülesanded ...

(millest osa juba lahendasime ära siin)

ülesanne:

Lihtsusta loogikaavaldised

(loogikaalgebra põhiseoste ja loogikatehete asendusseoste abil)



$$[x_1 \vee x_1x_2 \vee (\bar{x}_1 \rightarrow x_3)x_1 \vee x_1x_2\bar{x}_3x_4]\bar{x}_1 = \dots$$



$$\begin{aligned} \dots &= [x_1 \vee (x_1 \vee x_3)x_1 \vee x_1x_2\bar{x}_3x_4]\bar{x}_1 = \\ &= [x_1 \vee x_1x_1 \vee x_3x_1 \vee x_1x_2\bar{x}_3x_4]\bar{x}_1 = \\ &= [x_1 \vee x_1x_2\bar{x}_3x_4]\bar{x}_1 = \\ &= x_1\bar{x}_1 = \\ &= 0 \end{aligned}$$

.... lahendatud: osutus konstandiks 0



?... või siis oleks võinud ka nurksulud lahti korrutada \bar{x}_1 -ga (misjuhul neeldumisi poleks toimunudki):

$$\begin{aligned} \dots &= [x_1 \vee x_1x_1 \vee x_3x_1 \vee x_1x_2\bar{x}_3x_4]\bar{x}_1 = \\ &= x_1\bar{x}_1 \vee x_1x_1\bar{x}_1 \vee x_3x_1\bar{x}_1 \vee x_1x_2\bar{x}_3x_4\bar{x}_1 = \\ &= 0 \vee 0 \vee 0 \vee 0 = 0 \end{aligned}$$



$$(\bar{x}_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee x_3x_4 \vee \bar{x}_1x_3)(\bar{x}_1 \rightarrow x_4)(x_1 \rightarrow \bar{x}_4) = \dots$$



$$\dots = (\bar{x}_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee x_3x_4 \vee \bar{x}_1x_3)(x_1 \vee x_4)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_4) =$$

! tüüpiline viga:



sulgude lahtikorrutamise tulemus **peab olema samuti sulgudes** juhul kui need lahtikorrutatud sulud olid korratatud veel millegagi.

(senistes näidetes / avaldistes oli lahtikorrutatud tulemusele liidetud disjunktsiooniga muid liikmeid — misjuhul sulud polnud vajalikud)

valesti lahtikorrutatud rohelised sulgliikmed:

$$(\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee x_3 x_4 \vee \bar{x}_1 x_3) (x_1 \vee x_4) (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_4) =$$

$$= (\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee x_3 x_4 \vee \bar{x}_1 x_3) x_1 \bar{x}_1 \vee x_4 \bar{x}_1 \vee x_1 \bar{x}_4 \vee x_4 \bar{x}_4$$

õigesti lahtikorrutatud rohelised sulgliikmed:

$$(\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee x_3 x_4 \vee \bar{x}_1 x_3) (x_1 \vee x_4) (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_4) =$$

$$= (\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee x_3 x_4 \vee \bar{x}_1 x_3) (x_1 \bar{x}_1 \vee x_4 \bar{x}_1 \vee x_1 \bar{x}_4 \vee x_4 \bar{x}_4)$$

! tüüpiline viga:



selle avaldise esimesed liikmed:

$$\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee x_3 x_4 \vee \dots$$

... ei moodusta omavahel neeldumist $x \vee \bar{x} y$

$$\dots = (\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee x_3 x_4 \vee \bar{x}_1 x_3) (x_1 \vee x_4) (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_4) =$$

$$= (\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee x_3 x_4 \vee \bar{x}_1 x_3) (x_1 \bar{x}_1 \vee x_4 \bar{x}_1 \vee x_1 \bar{x}_4 \vee x_4 \bar{x}_4) =$$

$$= (\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee x_3 x_4 \vee \bar{x}_1 x_3) (x_4 \bar{x}_1 \vee x_1 \bar{x}_4) = \dots$$

... järjekordne sulgude lahtikorrutamine — nende sulgude lahtikorrutamise esmane, optimeerimata tulemus oleks:

$$\dots = \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 x_4 \bar{x}_1 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 x_1 \bar{x}_4 \vee x_3 x_4 x_4 \bar{x}_1 \vee x_3 x_4 x_1 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 x_3 x_4 \bar{x}_1 \vee \bar{x}_1 x_3 x_1 \bar{x}_4 = \dots$$

... korduvad algtermid jätame tulevikus elementaarkonjunktsioonide koosseisust otsekohe ära.

Järgnev avaldis kordab eelmist, rõhutades punase värviga neid liikmeid mis põhjustavad selle konkreetse elementaarkonjunktsiooni korrutumist **0-ks**:

$$= \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 x_4 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 x_1 \vee x_3 x_4 \bar{x}_1 \vee x_3 x_4 x_1 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 x_3 x_4 \vee \bar{x}_1 x_3 x_1 \bar{x}_4 =$$

$$= x_3 x_4 \bar{x}_1 \vee \bar{x}_1 x_3 x_4 =$$

$$= \bar{x}_1 x_3 x_4$$

seega saime lihtsustamisel:

$$(\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee x_3 x_4 \vee \bar{x}_1 x_3) (\bar{x}_1 \rightarrow x_4) (x_1 \rightarrow \bar{x}_4) = \bar{x}_1 x_3 x_4$$



$$[x_1 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_3 (x_2 \vee \bar{x}_1)] (x_1 \bar{x}_2 \vee x_4) = \dots$$



$$\dots = [x_1 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_3 \vee (x_2 \vee \bar{x}_1)] (x_1 \bar{x}_2 \vee x_4) =$$

$$\begin{aligned}
&= [x_1 \bar{x}_4 \vee x_3 \vee x_2 \vee \bar{x}_1] (x_1 \bar{x}_2 \vee x_4) = \\
&= x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_4 \vee x_1 \bar{x}_4 x_4 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee x_3 x_4 \vee x_1 \bar{x}_2 x_2 \vee x_2 x_4 \vee \\
&\quad \vee \bar{x}_1 x_1 \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 x_4 = \\
&= x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_4 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee x_3 x_4 \vee x_2 x_4 \vee \bar{x}_1 x_4
\end{aligned}$$

tekinud DNK-avaldis on piisavalt keeruline, misjuhul tuleb proovida teda edasi lihtsustada kõigi võtetega, millega üldse saab DNK-d lihtsustada.

! tüüpiline viga:



selle avaldise esimene ja neljas liige:

$$x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_4 \vee \dots \vee x_2 x_4$$

... ei moodusta neeldumist $x \vee \bar{x} y$

$$\dots = x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_4 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee x_3 x_4 \vee x_2 x_4 \vee \bar{x}_1 x_4$$

on olemas 4 võtet, millega saab DNK-d edasi lihtsustada:

otsime neeldumist: $x \vee x y$

otsime neeldumist: $x \vee \bar{x} y$

otsime ühise teguri sulgude ette toomise võimalust: $z(x \vee \bar{x})$

otsime ühise teguri sulgude ette toomise võimalust: $z(x \vee \bar{x} y)$



? ... aga miks me ei taha tuua ühist tegurit z sulgude ette nii, et sulgudesse jääks avaldis $z(x \vee x y)$?

... kuna optimaalsel teisendamisel ei tekki sellist avaldist sulgudesse mitte kunagi, sest neeldumine toimuks seljuhul ära juba enne ühise teguri sulgude

ette toomist — ehk neeldumine esineks seljuhul juba avaldises $z x \vee z x y$

... teisendamisel tekkinud DNK-avaldises

$$= x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_4 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee x_3 x_4 \vee x_2 x_4 \vee \bar{x}_1 x_4$$

... ei õnnestu rakendada nendest neljast lihtsustusvõttest mitte ühtegi.

Saadud DNK-avaldis ongi seega lõplikuks teisendustulemuseks.

(edaspidi tuleme selle näite juurde tagasi ja tuvastame Karnaugh' kaardi abil, et eelnevalt saadud DNK ei ole MDNK)

ülesanne:



Arvuta / Leia tõeväärtustabel eelnevalt saadud avaldisele:

$$x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_4 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee x_3 x_4 \vee x_2 x_4 \vee \bar{x}_1 x_4$$

ja samuti avaldisele:

$$x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_4 \vee x_3 x_4 \vee x_2 x_4 \vee \bar{x}_1 x_4$$

$x_1 x_2 x_3 x_4$	pikem avaldis	lühem avaldis
0 0 0 0		
0 0 0 1		
0 0 1 0		
0 0 1 1		
0 1 0 0		
0 1 0 1		
0 1 1 0		
0 1 1 1		
1 0 0 0		
1 0 0 1		
1 0 1 0		
1 0 1 1		

1 1 0 0		
1 1 0 1		
1 1 1 0		
1 1 1 1		



Kas need tõeväärtustabelid tulevad **samasugused** ?

Mida saame järeldada nende avaldiste kohta ja liikme $x_1 \bar{x}_2 x_3$ kohta ?

 iseseisev vabatahtlik kodune lahendamine : -----



Lihtsusta loogikaavaldis (3-muutuja loogikafunktsioon)
 loogikaalgebra põhiseoste ja asendusseoste abil

$$(x_1 \leftrightarrow x_3) \vee x_1(x_1 \rightarrow x_2)(x_1 \rightarrow x_3)(x_3 \vee \bar{x}_2) = \dots$$

vastus:

$$\dots = \bar{x}_1 \bar{x}_3 \vee x_1 x_3 \vee x_1 x_2$$

Loogikatehe "SUMMA MOODULIGA 2" ("välistav VÕI") \oplus

$$x_1 \oplus x_2$$

Loogikatehe (ehk 2-he muutuja funktsioon) "summa mooduliga 2" on ekvivalentsi **inversioon** :

$$x_1 \oplus x_2 = x_1 \leftrightarrow x_2 \quad \text{samuti:} \quad x_1 \oplus x_2 = x_1 \leftrightarrow x_2$$

2-muutuja kõikide loogikafunktsioonide $f(x_1 x_2)$ hulgas :

$x_1 x_2$	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
0 0	0	0	0	0	0	0	0	0
0 1	0	0	0	0	1	1	1	1
1 0	0	0	1	1	0	0	1	1
1 1	0	1	0	1	0	1	0	1
	0	$x_1 x_2$	$\overline{x_1 \rightarrow x_2}$	x_1	$\overline{x_2 \rightarrow x_1}$	x_2	$\overline{x_1 \leftrightarrow x_2}$	$x_1 \vee x_2$
							$x_1 \oplus x_2$	

$x_1 x_2$	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0 0	1	1	1	1	1	1	1	1
0 1	0	0	0	0	1	1	1	1
1 0	0	0	1	1	0	0	1	1
1 1	0	1	0	1	0	1	0	1
	$\overline{x_1 \vee x_2}$	$x_1 \leftrightarrow x_2$	\bar{x}_2	$x_2 \rightarrow x_1$	\bar{x}_1	$x_1 \rightarrow x_2$	$\overline{x_1 x_2}$	1

.... leidus tehe "summa mooduliga 2" funktsioonina f_6 :

$x_1 x_2$	f_6	f_9
0 0	0	1
0 1	1	0
1 0	1	0
1 1	0	1
	$x_1 \oplus x_2$	$x_1 \leftrightarrow x_2$



? millest tuleb nimetus "SUMMA MOODULIGA 2" ?

$$\bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 = \bar{x}_1 x_2 x_3 \oplus x_1 \bar{x}_2 x_3$$

... sest ka siin ei õnnestu väärtustada loogikamuutujaid $x_1 x_2 x_3$ konkr. väärtustega **0** ja **1** nii, et tekkiks liidetavate väärtuste paar: $1 \vee 1$
 misjuhul ei tekki ka liidetavate väärtuste paari: $1 \oplus 1$



NB! oluline pole mitte **liidetavate elementaarkonjunktsioonide koguarv** DNK-avaldises (mis on siin juhtumisi 2) vaid liidetavate **ÜHTEDE** koguarv (mis tekitab avaldises pärast muutujate väärtustamist konkr. väärtustega)

.... need olid tehte \oplus kõik olulised omadused

ülesanne:

Avaldada DNK-kujul avaldis



$$f(x_1 x_2 x_3) = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$$



on 2 võimalikku DNK-leidmisviisi:

1. kasutades asendusseost $x \oplus y = \bar{x}y \vee x\bar{y}$

$$\begin{aligned} x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 &= (x_1 \oplus x_2) \oplus x_3 = (\bar{x}_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_2) \oplus x_3 = \\ &= (\bar{x}_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_2) x_3 \vee (\bar{x}_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_2) \bar{x}_3 = \\ &= \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 = \\ &= (x_1 \vee \bar{x}_2)(\bar{x}_1 \vee x_2) x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= (x_1 \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_1 \vee x_1 x_2 \vee \bar{x}_2 x_2) x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 = \\ &= (\bar{x}_2 \bar{x}_1 \vee x_1 x_2) x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 = \\ &= \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \end{aligned}$$

saime **täieliku DNK (TDNK)** kuna igas DNK liikmes leiduvad siin selle funktsiooni $f(x_1 x_2 x_3)$ **kõik** muutujad

prüüame seda DNK-d edasi lihtsustada:

meenutame **4 võtet**, millega üldse saab DNK-d edasi lihtsustada:

neeldumine: $x \vee x y$ pole võimalik TDNK korral

neeldumine: $x \vee \bar{x} y$ pole võimalik TDNK korral

ühine tegur sulgude ette: $z(x \vee \bar{x} y)$ pole võimalik TDNK korral



? MIKS pole need 3 teisendusvõtet kasutatavad TDNK peal? nendest neljast ainsana osutub võimalikuks TDNK jaoks:

ühine tegur sulgude ette: $z(x \vee \bar{x})$ ainult see on võimalik TDNK korral

$$\dots = \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$$

... otsime siin TDNK-avaldises sellist võimalust tuua ühine tegur sulgude ette

selgub et siin ei leidu ainsatki sellist võimalust — seega ei saa seda TDNK-avaldist enam lihtsustada ehk teisendustulemuseks jääbki TDNK:

$$\dots = \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$$

(lahendatud)

2. sama ülesande **teine lahendusvõimalus** DNK saamiseks avaldisele

$$x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 :$$



avaldise $x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$ teisendamise asemel
koostame / arvutame talle tõeväärtustabeli :



x_1	x_2	x_3	$x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$
0	0	0	
0	0	1	
0	1	0	
0	1	1	
1	0	0	
1	0	1	
1	1	0	
1	1	1	

x_1	x_2	x_3	$x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

! DNK saadakse loogikafunktsiooni 1de piirkonnast !



.... ja tõeväärtustabelist saab vahetult väljakirjutada just TDNK

kirjutame tõeväärtustabeli 1de piirkonnast välja TDNK
elementaarkonjunktsioonid — need tulevad samad nagu saime ka
teisendamisel :

x_1	x_2	x_3	$x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$	TDNK liikmed
0	0	0	0	
0	0	1	1	$\bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3$
0	1	0	1	$\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3$
0	1	1	0	
1	0	0	1	$x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$
1	0	1	0	
1	1	0	0	
1	1	1	1	$x_1 x_2 x_3$

$$x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 = \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_1 x_2 x_3$$

.... proovime seda TDNK-d lihtsustada ? — osutub võimatuks
(lahendatud)

ülesanne:

Lihtsusta loogikaavaldis

(asendusseoste ja loogikaalgebra põhiseoste abil)



$$x_1 x_1 \oplus x_2 \oplus x_1 x_2 = \dots$$



$$\begin{aligned} \dots &= x_1 (x_1 \leftrightarrow x_2) \oplus x_1 x_2 = \\ &= x_1 (\bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee x_1 x_2) \oplus x_1 x_2 = \\ &= (x_1 \bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee x_1 x_1 x_2) \oplus x_1 x_2 = \\ &= (0 \vee x_1 x_2) \oplus x_1 x_2 = \end{aligned}$$

$$= x_1 x_2 \oplus x_1 x_2 =$$

$$= 0$$

iseseisev vabatahtlik kodune lahendamine:



roheline õpiku lk. 205 viimased 2 ülesannet
(. . . . mida me ei lahendanud ära tunnis)

ülesanne:



Kirjuta tõeväärtustabelist välja selle funktsiooni TDNK ja lihtsusta see loogikaalgebra põhiseoste abil MDNK-ks

$x_1 x_2 x_3$	$f(x_1 x_2 x_3)$
0 0 0	1
0 0 1	0
0 1 0	1
0 1 1	1
1 0 0	0
1 0 1	1
1 1 0	1
1 1 1	1



$$f(x_1 x_2 x_3) = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee$$

$$\vee x_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 x_2 x_3 = \dots$$

jälle meenutame 4 võtet , millega saab DNK-d edasi lihtsustada :

neeldumine: $x \vee x y$ pole võimalik TDNK korral

neeldumine: $x \vee \bar{x} y$ pole võimalik TDNK korral

ühine tegur sulgude ette : $z(x \vee \bar{x} y)$ pole võimalik TDNK korral

ühine tegur sulgude ette : $z(x \vee \bar{x})$ ainult see on võimalik TDNK korral

$$\dots = \bar{x}_1 \bar{x}_3 (\bar{x}_2 \vee x_2) \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee$$

$$\vee x_1 x_2 (\bar{x}_3 \vee x_3) =$$

$$= \bar{x}_1 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 = \dots$$

on tekkinud DNK-avaldis, kus nüüd juba leiduvad erinevate tegurite arvuga elementaarkonjunktsioonid — misjuhul \vee õ i b nüüd leiduda ka neeldumisi :

$$x \vee x y$$

$$x \vee \bar{x} y$$

. . . ja nüüd saab leiduda võimalusi ühist tegurit sulgude ette tuua ka nii:

$$z(x \vee \bar{x} y)$$

$$\dots = \bar{x}_1 (\bar{x}_3 \vee x_2 x_3) \vee x_1 (\bar{x}_2 x_3 \vee x_2) =$$

$$= \bar{x}_1 (\bar{x}_3 \vee x_2) \vee x_1 (x_3 \vee x_2) =$$

$$= \bar{x}_1 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \vee x_1 x_3 \vee x_1 x_2 = \dots$$

. . . siit edasi saab leiduda ainult teisendussamm : $z(x \vee \bar{x})$ kuna tekkinud DNK kõik elementaarkonjunktsioonid on (võrdset) kahe algtermiga

$$\begin{aligned} \dots &= \bar{x}_1 \bar{x}_3 \vee x_2 (\bar{x}_1 \vee x_1) \vee x_1 x_3 = \\ &= \bar{x}_1 \bar{x}_3 \vee x_2 \vee x_1 x_3 \end{aligned}$$

teisendustulemuseks saadud DNK on MDNK

iseseisev vabatahtlik kodune lahendamine :

Lihtsusta eelnev TDNK veelkord samaks MDNK-ks , alustades esimesel teisendussammul sinisest erinevalt :

$$\begin{aligned} f(x_1 x_2 x_3) &= \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee \\ &\quad \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 x_2 x_3 = \\ &= \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_2 \bar{x}_3 (\bar{x}_1 \vee x_1) \vee x_2 x_3 (\bar{x}_1 \vee x_1) \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 = \\ &= \dots = \\ &= \bar{x}_1 \bar{x}_3 \vee x_2 \vee x_1 x_3 \end{aligned}$$

Loogikaavaldiste teisenduste kokkuvõtteks

Kõik teisendusnäited viitavad, et avaldiste käsitsi lihtsustamise tulemuseks on enamasti **Disjunktiivne Normaalkuju (DNK)**

Meenutame varasemat ülesannet, kus koostati **viie** tõeväärtustabeli jaoks neid esitavad **loogikaavaldisi** :

$x_1 x_2$	f_e	f_t	f_k	f_n	f_v
0 0	0	1	1	1	1
0 1	0	0	0	0	1
1 0	1	0	1	1	1
1 1	0	1	1	0	1

avaldis:	avaldis:	avaldis:	avaldis:	avaldis:
$\overline{x_1 \rightarrow x_2}$	$x_1 \leftrightarrow x_2$	$x_2 \rightarrow x_1$	\bar{x}_2	1
$\bar{x}_1 \vee x_2$	$\bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee x_1 x_2$	$\bar{x}_1 \rightarrow \bar{x}_2$	$\bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee x_1 \bar{x}_2$	
$x_1 \bar{x}_2$	$(x_1 \vee \bar{x}_2)(\bar{x}_1 \vee x_2)$	$x_1 \vee \bar{x}_2$	$(x_1 \vee \bar{x}_2)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2)$	
	$\overline{\bar{x}_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_2}$	$\bar{x}_1 x_2$		

Siin on igale 2-muutuja funktsioonile (igale tõeväärtustabelile) esitatud kuni 4 sobivat loogikaavaldist.

iseseisev vabatahtlik kodune lahendamine :



Leia teisendussammud, kuidas eelnevas tabelis näidatud

iga **punane** avaldis teisendub (samam veerus olevaks) **siniseks** avaldiseks ;

iga **sinine** avaldis teisendub (samam veerus olevaks) **rohelisteks** avaldiseks.