Loogikatehe "SUMMA MOODULIGA 2" (*"välistav VÕI"*) $\oplus$

$$x_1 \oplus x_2$$

Loogikatehe (ehk 2-he muutuja funktsioon) "*summa mooduliga 2*" on **ekvivalentsi inversioon** :

$x_1 \oplus x_2 = \overline{x_1 \leftrightarrow x_2}$ *samuti*: $\overline{x_1 \oplus x_2} = x_1 \leftrightarrow x_2$

2-muutuja kõikide loogikafunktsioonide $f\,(x_1\, x_2)$ hulgas :

$x_1\, x_2$	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
0 0	0	0	0	0	0	0	**0**	0
0 1	0	0	0	0	1	1	**1**	1
1 0	0	0	1	1	0	0	**1**	1
1 1	0	1	0	1	0	1	**0**	1
	0	$x_1 x_2$	$\overline{x_1 \rightarrow x_2}$	x_1	$\overline{x_2 \rightarrow x_1}$	x_2	$\overline{x_1 \leftrightarrow x_2}$ $x_1 \oplus x_2$	$x_1 \vee x_2$

$x_1\, x_2$	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0 0	1	**1**	1	1	1	1	1	1
0 1	0	**0**	0	0	1	1	1	1
1 0	0	**0**	1	1	0	0	1	1
1 1	0	**1**	0	1	0	1	0	1
	$\overline{x_1 \vee x_2}$	$x_1 \leftrightarrow x_2$	$\overline{x_2}$	$x_2 \rightarrow x_1$	$\overline{x_1}$	$x_1 \rightarrow x_2$	$\overline{x_1 x_2}$	**1**

. . . . leidus tehe "**summa mooduliga 2**" funktsioonina f_6 :

$x_1\, x_2$	f_6	f_9
0 0	**0**	**1**
0 1	**1**	**0**
1 0	**1**	**0**
1 1	**0**	**1**
	$x_1 \oplus x_2$	$x_1 \leftrightarrow x_2$

? . . . . millest tuleb nimetus "**SUMMA MOODULIGA 2**" **?**

Nimi sobib selleparäst, et (funktsiooni f_6) väärtus osutub võrdseks operandide aritmeetilise summaga, millele on rakendatud moodulit **2** :

$(\mathbf{0} + \mathbf{0})\ mod\ 2 = \mathbf{0}\ mod\ 2 = \mathbf{0}$

$(\mathbf{0} + \mathbf{1})\ mod\ 2 = \mathbf{1}\ mod\ 2 = \mathbf{1}$

$(\mathbf{1} + \mathbf{0})\ mod\ 2 = \mathbf{1}\ mod\ 2 = \mathbf{1}$

$(\mathbf{1} + \mathbf{1})\ mod\ 2 = \mathbf{2}\ mod\ 2 = \mathbf{0}$

Loogikatehet "*summa mooduliga 2*" nimetatakse ka "*välistav* VÕI" ja tähistatakse **XOR** (*eXclusive OR*)

? . . . . millest tuleb nimetus "**VÄLISTAV VÕI**" **?**

$x_1\, x_2$	f_6	f_7
0 0	**0**	**0**
0 1	**1**	**1**
1 0	**1**	**1**
1 1	**0**	**1**
	$x_1 \oplus x_2$	$x_1 \vee x_2$

näeme tõeväärtustabelitest: tehted VÕI ja "*välistav* VÕI" (**OR** ja **XOR**) on sarnased.

Erinevus on ainult argumendiväärtuste kombinatsiooni

$x_1 = 1$ $x_2 = 1$ korral.

Tehe **XOR** väärtustub **1**-ks siis, kui kas <u>esimene</u> või <u>teine</u> operand **(kuid mitte mõlemad korraga !)** on **1**.

Operandiväärtused **1** nagu "välistaksid" **XOR**–korral vastastikku teineteist ehk "*välistav VÕI*" reageerib (erinevalt tehtest VÕI) olukorrale
$x_1 = 1$ $x_2 = 1$ väärtustumisega **0**-ks

Märgime, et praktilises keelekasutuses kasutatakse sidesõna **"VÕI"** justnimelt tähenduses **"välistav VÕI"** ehk igapäevane sidesõna **"VÕI"** siiski erineb veidi temale omistatud / defineeritud tähendusest *lausearvutuses*.
Kõnekeeles ei koostata/kasutata VÕI-lauset nii, et mõlemad (VÕI-ga seotud) väited/laused on <u>samaaegselt</u> tõesed.

näited kõnekeele VÕI-lausetest :

..... kirjutan pliiatsiga **või** *pastakaga .....*

..... värvi pintsliga **või** *värvirulliga .....*

..... tulen jala **või** *jalgrattaga .....*

.... kodutöö lehed tuleb panna kiletaskusse **või** *kinnitada lehed klambriga ....*

Avaldise $x_1 \oplus x_2$ DNK-kujulise *asendusseose* saame tema **1**-de piirkonnast, mis on **{ 01, 10 }** :

$x_1 x_2$	f_6
0 0	**0**
0 1	**1**
1 0	**1**
1 1	**0**
	$x_1 \oplus x_2$

$$x_1 \oplus x_2 = \bar{x}_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_2$$

Avaldis $\bar{x}_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_2$ väärtustub tema muutujate kõigi nelja väärtuskombinatsiooni korral kokkulangevalt avaldisega $x_1 \oplus x_2$:

$x_1 x_2$	$x_1 \oplus x_2$	$\bar{x}_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_2$
0 0	$\mathbf{0} \oplus \mathbf{0} = \mathbf{0}$	$\bar{\mathbf{0}}\cdot\mathbf{0} \vee \mathbf{0}\cdot\bar{\mathbf{0}} = \mathbf{0}$
0 1	$\mathbf{0} \oplus \mathbf{1} = \mathbf{1}$	$\bar{\mathbf{0}}\cdot\mathbf{1} \vee \mathbf{0}\cdot\bar{\mathbf{1}} = \mathbf{1}$
1 0	$\mathbf{1} \oplus \mathbf{0} = \mathbf{1}$	$\bar{\mathbf{1}}\cdot\mathbf{0} \vee \mathbf{1}\cdot\bar{\mathbf{0}} = \mathbf{1}$
1 1	$\mathbf{1} \oplus \mathbf{1} = \mathbf{0}$	$\bar{\mathbf{1}}\cdot\mathbf{1} \vee \mathbf{1}\cdot\bar{\mathbf{1}} = \mathbf{0}$

eelnevat asendusseost:

$$x_1 \oplus x_2 = \bar{x}_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_2$$

võib kasutada tehte $\oplus$ asendamiseks loogikaavaldiste teisendamisel.

Digitaaltehnikas tähistatakse **XOR**-tehte **inversiooni** ka lühendiga **XNOR**. XNOR on seega sama mis loogikatehe **ekvivalents**.

Tehte $\oplus$ omadused

tehte $\oplus$ kõik omadused järelduvad tema tõeväärtustabelist :

$x_1 x_2$	$x_1 \oplus x_2$
0 0	$\mathbf{0} \oplus \mathbf{0} = \mathbf{0}$
0 1	$\mathbf{0} \oplus \mathbf{1} = \mathbf{1}$
1 0	$\mathbf{1} \oplus \mathbf{0} = \mathbf{1}$
1 1	$\mathbf{1} \oplus \mathbf{1} = \mathbf{0}$

"inversiooni imiteerimine"

teisest ja **neljandast** reast tõeväärtustabelis :

$x_1\,x_2$	$x_1 \oplus x_2$
0 0	$0 \oplus 0 = 0$
0 1	$\mathbf{0 \oplus 1 = 1}$
1 0	$1 \oplus 0 = 1$
1 1	$\mathbf{1 \oplus 1 = 0}$

. . . saame üldistada :

$$x \oplus 1 = \;. . . .$$

$$x \oplus 1 = \overline{x}$$

Seega konstandi **1** juurdeliitmine muutujale / avaldisele tehtega $\oplus$ *inverteerib* selle avaldise väärtuse vastupidiseks.

NB! x rollis võib olla ka suvaline keerukam avaldis :

$$(. . . . .) \oplus 1 = \overline{(. . . . .)}$$

konstandi 0 juurdeliitmine tehtega $\oplus$ on ebaefektiivne (ehk "ei mõju") :

Eelneva tõeväärtustabeli **esimesest** ja **kolmandast** reast järeldame :

$x_1\,x_2$	$x_1 \oplus x_2$
0 0	$\mathbf{0 \oplus 0 = 0}$
0 1	$0 \oplus 1 = 1$
1 0	$\mathbf{1 \oplus 0 = 1}$
1 1	$1 \oplus 1 = 0$

$$x \oplus 0 = \;. . . .$$

$$x \oplus 0 = x$$

(meenutame : $x \vee 0 = x$)

konstandi 1 korduv juurdeliitmine tehtega $\oplus$

neljandas reas : $\mathbf{1 \oplus 1 = 0}$, seega liites tehtega $\oplus$ konstante **1** :

$$1 \oplus 1 \oplus 1 = \;. . . .$$

$$1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 = \;. . . .$$

$$1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 = \;. . . .$$

$$1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 = \;. . . .$$

$$1 \oplus 1 \oplus 1 = 1$$

$$1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 = 0$$

$$1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 = 1$$

$$1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 = 0$$

Seega võib paarisarv tk. liidetavaid konstante **1** lihtsalt avaldisest ära jätta, kuna enne selgus et konstandi **0** juurdeliitmine selle tehtega ei muuda avaldise väärtust: $x \oplus 0 = x$

samade väärtuste kokkuliitmine tehtega $\oplus$

esimesest ja **neljandast** reast . . . . :

$x_1\,x_2$	$x_1 \oplus x_2$
0 0	$\mathbf{0 \oplus 0 = 0}$
0 1	$0 \oplus 1 = 1$
1 0	$1 \oplus 0 = 1$
1 1	$\mathbf{1 \oplus 1 = 0}$

. . . . võib üldistada, et liites loogikamuutujale x tema enda :

$$x \oplus x = \;. . . .$$

. . . . on tulemuseks alati **0** olenemata x väärtusest :

$$x \oplus x = 0$$

(meenutame : $x \vee x = x$)

kuna $x \oplus x = 0$ siis järeldub, et ka näiteks

$$x_1 x_2 \oplus x_1 x_2 = 0$$

$$x_1 x_2 \overline{x_3} \oplus x_1 x_2 \overline{x_3} = 0 \qquad \text{jne.}$$

Liites tehtega $\oplus$ korduvalt sedasama loogikamuutujat x ,
saame eelnevast tulenevalt:

$$x \oplus x \oplus x \;=\; \ldots$$
$$x \oplus x \oplus x \oplus x \;=\; \ldots$$

$$x \oplus x \oplus x \;=\; x$$
$$x \oplus x \oplus x \oplus x \;=\; 0$$
$$x \oplus x \oplus x \oplus x \oplus x \;=\; x$$
$$x \oplus x \oplus x \oplus x \oplus x \oplus x \;=\; 0$$

Seega võib <u>paarisarv tk</u>. liidetavaid muutujaid x lihtsalt avaldisest ärajätta, sest nende summa tehtega $\oplus$ on samuti **0**

$$x \oplus \overline{x} \;=\; ?$$

teisest ja **kolmandast** reast . . . . :

$x_1\,x_2$	$x_1 \oplus x_2$
0 0	$0 \oplus 0 = 0$
0 1	$0 \oplus 1 = 1$
1 0	$1 \oplus 0 = 1$
1 1	$1 \oplus 1 = 0$

. . . . võib üldistada, et liites loogikamuutujale x tema *inversiooni* $\overline{x}$:

$$x \oplus \overline{x} \;=\; \ldots$$

$$x \oplus \overline{x} \;=\; 1$$

(meenutame et ka : $x \vee \overline{x} = 1$)

teisest ja **kolmandast** reast järeldub ka :

tehe $\oplus$ *ei olene* <u>*operandide järjekorrast*</u> (ehk järeldub *kommutatiivsus*) :

$$x \oplus y \;=\; y \oplus x$$

distributiivsus (sulgude lahtikorrutamine tehte $\oplus$ suhtes)

Loogikaalgebra põhiseoste hulgas leidus *distributiivsusseadus*, mille kohaselt *konjunktsioon* on distributiivne *disjunktsiooni* suhtes:

$$x\,(y \vee z) \;=\; xy \vee xz$$

konjunktsioon on ka tehte $\oplus$ suhtes *distributiivne* :

$$x\,(y \oplus z) \;=\; xy \oplus xz$$

Sellise *distributiivsuse* kehtimise kontrollimiseks võib arvutada eelneva võrduse mõlema poole väärtused muutujate kõigi 8 väärtuskombinatsiooni korral
ehk arvutame võrduse mõlema poole *tõeväärtustabelid* nende võrdlemiseks:

$x\,y\,z$	$x\,(y \oplus z)$	$xy \oplus xz$
0 0 0	**0**	**0**
0 0 1	**0**	**0**
0 1 0	**0**	**0**
0 1 1	**0**	**0**
1 0 0	**0**	**0**
1 0 1	**1**	**1**
1 1 0	**1**	**1**
1 1 1	**0**	**0**

Tõeväärtustabelite täpne kokkulangevus tõestab nendele vastavate avaldiste loogilist samaväärsust. Seega võib konjunktsioonitehet kasutades sulge lahti korrutada mitte ainult $\vee$ suhtes, vaid ka $\oplus$ suhtes.

Võrduse $x\,(y \oplus z) = xy \oplus xz$ kehtivust võime kontrollida ka tema mõlemaid pooli teisendades asendusseose

$$x_1 \oplus x_2 = \bar{x}_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_2$$ abil.

Teisendame võrduse vasakut poolt:

$$x(y \oplus z) = x(\bar{y} z \vee y \bar{z}) = x \bar{y} z \vee x y \bar{z}$$

Teisendame võrduse paremat poolt:

$$xy \oplus xz = \overline{xy}\, xz \vee xy\, \overline{xz} = (\bar{x} \vee \bar{y})\, xz \vee xy\, (\bar{x} \vee \bar{z}) =$$

$$= \bar{x} x z \vee \bar{y} x z \vee x y \bar{x} \vee x y \bar{z} = x \bar{y} z \vee x y \bar{z}$$

Seega jõudsime võrduse $x(y \oplus z) = xy \oplus xz$ mõlemat poolt teisendades sama avaldiseni $x \bar{y} z \vee x y \bar{z}$, mis samuti kinnitab võrduse kehtimist.

pane tähele :

eelnevas tõeväärtustabelis olnud **1**-de piirkond (kaks rida) annavad just needsamad *elementaarkonjunktsioonid* , mis tekkisid ka nüüd avaldise teisendusel :

$$\ldots = x \bar{y} z \vee x y \bar{z}$$

$x\ y\ z$	$x(y \oplus z)$	$xy \oplus xz$
0 0 0	0	0
0 0 1	0	0
0 1 0	0	0
0 1 1	0	0
1 0 0	0	0
1 0 1	**1**	**1**
1 1 0	**1**	**1**
1 1 1	0	0

meenutame : tõeväärtustabeli **1de piirkonnast** saab välja kirjutada **DNK**

! tehte $\oplus$ korral ei esine **neeldumist !**

! *tüüpiline viga:*

Kuigi $x \vee xy = x$

. . . siis $\oplus$ korral sarnane neeldumine **ei kehti** :

$$x \oplus xy \neq x$$

seda saame kontrollida muutujaväärtuste $f(xy) = f(11)$ korral eelnevas avaldises :

$$x \oplus xy = 1 \oplus 1 \cdot 1 = 1 \oplus 1 = 0$$

. . . . kuid x oli väärtustatud : $x = 1 \neq 0$

Tehete $\oplus$ ja $\vee$ samaväärsuse tingimus

Tehete $\oplus$ ja $\vee$ omadustest (definitsioonidest) tuleneb:

kui liidetavateks on **konstandid** :

Kui kokkuliidetavate operandide hulgas on <u>paaritu arv</u> tk. **loogikaväärtusi 1 , siis võib sellised operandid kokku liita ükskõik kumba tehtega :** nii tehtega $\vee$ kui ka tehtega $\oplus$

(mõlemal juhul on tulemus sama)

$$0 \vee 1 \vee 0 \vee 0 \vee 0 = 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0$$

$$0 \vee 1 \vee 0 \vee 1 \vee 1 = 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1$$

kui liidetavateks on **avaldised** (näiteks *elementaarkonjunktsioonid*) :

Kui loogikamuutujate x_i **väärtustamisel tekkib ALATI** **paaritu arv** tk. **liidetavaid väärtusi 1** (näiteks ainult üks liidetav) , **siis võib sellised operandid** / elementaarkonjunktsioonid **kokku liita ükskõik kumba tehtega :** nii tehtega ∨ kui ka tehtega ⊕
(mõlemal juhul on tulemus sama)

näide:

lihtsa avaldise $\bar{x}_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_2$ korral võib asendada ∨ asemele ⊕ :

$$\bar{x}_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_2 = \bar{x}_1 x_2 \oplus x_1 \bar{x}_2$$

samuti ka sellises avaldises :

$$\bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 = \bar{x}_1 x_2 x_3 \oplus x_1 \bar{x}_2 x_3$$

. . . sest ka siin ei õnnestu väärtustada loogikamuutujaid $x_1\ x_2\ x_3$ konkr. väärtustega **0** ja **1** nii , et tekkiks liidetavate väärtuste paar : **1** ∨ **1**

. . . . misjuhul ei tekki ka liidetavate väärtuste paari : **1** ⊕ **1**

NB! oluline pole mitte **liidetavate elementaarkonjunktsioonide koguarv** DNK-avaldises (mis on siin juhtumisi 2) vaid liidetavate **ÜHTEDE** koguarv (mis tekkib avaldises pärast muutujate väärtustamist konkr. väärtustega)

. . . . *need olid tehte* ⊕ *kõik olulised omadused*

ülesanne:

Avaldada DNK-kujul avaldis

$$f\,(x_1 x_2 x_3) = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$$

on 2 võimalikku DNK-leidmisviisi :

1. *kasutades asendusseost* $x \oplus y = \bar{x} y \vee x \bar{y}$

$$x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 = (x_1 \oplus x_2) \oplus x_3 = (\bar{x}_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_2) \oplus x_3 =$$

$$= \overline{(\bar{x}_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_2)}\, x_3 \vee (\bar{x}_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_2)\, \bar{x}_3 =$$

$$= \overline{\bar{x}_1 x_2}\ \overline{x_1 \bar{x}_2}\ x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 =$$

$$= (x_1 \vee \bar{x}_2)(\bar{x}_1 \vee x_2)\, x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 =$$

$$= (x_1 \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_1 \vee x_1 x_2 \vee \bar{x}_2 x_2)\, x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 =$$

$$= (\bar{x}_2 \bar{x}_1 \vee x_1 x_2)\, x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 =$$

$$= \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$$

saime **täieliku DNK** (TDNK) kuna igas DNK liikmes leiduvad siin selle funktsiooni $f\,(x_1 x_2 x_3)$ **kõik** muutujad

püüame seda DNK-d edasi lihtsustada :

meenutame **4 võtet** , *millega üldse saab DNK-d edasi lihtsustada :*

neeldumine: $x \vee x y$ *pole võimalik TDNK korral*

neeldumine: $x \vee \bar{x} y$ *pole võimalik TDNK korral*

ühine tegur sulgude ette : $z\,(x \vee \bar{x} y)$ *pole võimalik TDNK korral*

? . . . . *MIKS pole* *need 3 teisendusvõtet* *kasutatavad TDNK peal* **?**
nendest neljast ainsana osutub võimalikuks TDNK jaoks :

ühine tegur sulgude ette : $z\,(x \vee \bar{x})$ ainult see on võimalik TDNK korral

$$. . . . = \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$$

. . . *otsime siin TDNK-avaldises sellist võimalust tuua ühine tegur*