$$. . . . = \bar{\bar{x}}_4 \, \bar{x}_1 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4 \, \overline{\bar{x}_1 \bar{x}_3} =$$

$$= x_4 \bar{x}_1 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4 (x_1 \vee x_3) =$$

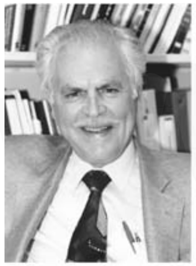
$$= \bar{x}_1 \bar{x}_3 x_4 \vee x_1 \bar{x}_4 \vee x_3 \bar{x}_4$$

tekkis DNK mida ei saa enam teisendada lihtsamaks DNK-ks, seega ongi valmis

saime vaadeldava funktsiooni $f = \bar{x}_2 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$ *jaoks*
tema tuletise muutuja x_2 *järgi :*

$$\frac{\delta f}{\delta x_2} = \bar{x}_1 \bar{x}_3 x_4 \vee x_1 \bar{x}_4 \vee x_3 \bar{x}_4 = f (x_1 x_3 x_4)$$

Reed - Mulleri POLÜNOOM



Irving S. Reed
(1923 — 2012)

David E. Muller
(1924 — 2008)

. . . . ainus nn. **p o l ü n o o m a v a l d i s** loogikaavaldiste hulgas . . . .

Loogikaavaldise erikuju, mis võib sisaldada ainult neid <u>kahte loogikatehet</u> ja konstanti **1** :

summa mooduliga 2 : $\oplus$
konjunktsioon : **&** $\wedge$
konstant 1 : **1**

. . . . ja kus **sulud** on lahtikorrutatud (ehk sulge enam pole)

Reed-Mulleri polünoom on seega (sulgudeta) loogikaavaldis süsteemis

$$\{ \, \& \quad \oplus \quad 1 \, \}$$

seega : polünoomis **ei sisaldu** tehteid *disjunktsioon* ja *inversioon*

meenutame : igal loogikafunktsioonil on täpselt üks **TDNK** **TaDNK**
samuti : Igal loogikafunktsioonil on **täpselt üks** *Reed-Mulleri polünoom*

ülesanne:

Leida **MDNK** **MKNK** **Reed-Mulleri polünoom**
järgneval kaardil esitatud 4-muutuja funktsioonile :

f :

$x_1x_2 \backslash x_3x_4$	00	01	11	10
00	1		1	
01	1			
11	1	1	1	1
10	1		1	

MDNK :

$x_1x_2 \backslash x_3x_4$	00	01	11	10
00	1		1	
01	1			
11	1	1	1	1
10	1		1	

MDNK jaoks parimad kontuurid

MDNK : $$f = \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee x_1 x_2 \vee \bar{x}_2 x_3 x_4$$

$x_1x_2 \backslash x_3x_4$	00	01	11	10
00	1		1	
01	1			
11	1	1	1	1
10	1		1	

MKNK jaoks (näiteks) kontuurid

MKNK :

$$f = (x_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_4)(x_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_4)(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_4)(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)$$

(siin leidub 3 erinevat **MKNK**-d)

Reed-Mulleri polünoom

Reed-Mulleri polünoomi võib leida kolmel viisil:

1.

asendusseos $x_1 \vee x_2 = x_1 x_2 \oplus x_1 \oplus x_2$ kaotab keelatud **VÕI**-tehte . . . kuid viib töömahukate pikkade teisendusteni : halb võimalus

2.

$\overline{x_1 \vee x_2} = \bar{x}_1 \bar{x}_2$ *DeMorgani seadus* kaotab samuti $\vee$-tehted,

kuid tekkib väga palju *inversioone*, mille järgnev kaotamine on kah pikk teisendus : halb võimalus

3.

kõige eelistatum on **Karnaugh' kaardi abil polünoomavaldise leidmine**

Selleks koostatakse **s p e t s i a a l n e D N K** , kus kõik tehted $\vee$ tohib avaldises lihtviisiliselt **asendada** tehtega $\oplus$
(ilma avaldise loogilist väärtust sellega muutmata)

Sellise omadusega DNK saamiseks tuleb kaardil kõik **1**-d katta suurimate kontuuridega nii, et **1**-de piirkonna <u>iga ruut</u> kaardil oleks kaetud **paaritu arv** kordselt — s.t. oleks kaetud **1** või **3** kontuuri poolt
(mitte 2 ega 4 kontuuri poolt)

! *tüüpiline viga:*

mitte KONTUURE ei pea olema valitud **paaritu arv** tk . . . . .

. . . . . vaid iga ruut "**1**" peab olema kaetud kontuuridega **1**-kordselt või **3**-kordselt ;

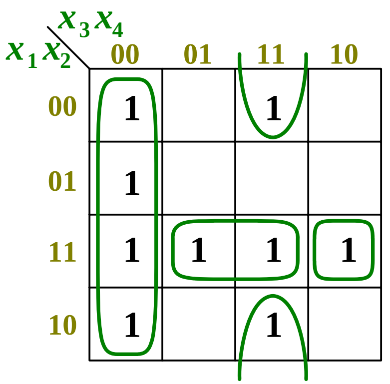
valitud kontuuride koguarv võib seejuures olla nii **paaris**arv kui ka **paaritu**.

polünoomi l ä h t e a v a l d i s e koostamine Karnaugh' kaardilt

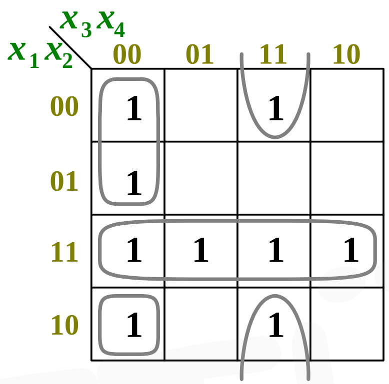
Kontuuride valiku reegel tasub ümbersõnastada lihtsustatud kujule:

kõik **1-d** tuleb katta (võimalikult suurte) **mittelõikuvate** / mittekattuvate kontuuridega : (kontuurid "ei puuduta" üksteist — misjuhul saavad kõik **1**-d olema kontuuridega kaetud **1-kordselt**)

Katame kaardil kõik "**1**"-d *mittelõikuvate* kontuuridega (palju võimalusi) :

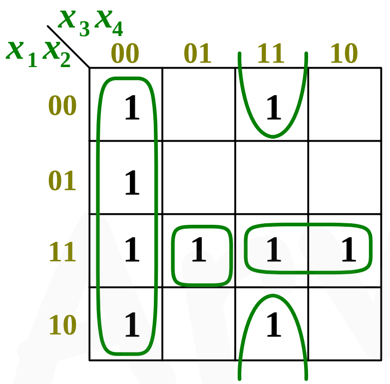


kaetud **mittelõikuvate** kontuuridega
(kõrvalolevast võimalusest **eelistatum**)



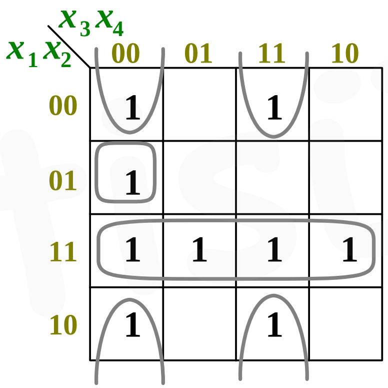
kah **mittelõikuvad** kontuurid
(teine sobiv valikuvõimalus)

veel võimalus kontuure valida :



kaetud **mittelõikuvate** kontuuridega

. . . . ja veel ka nii võimalik :

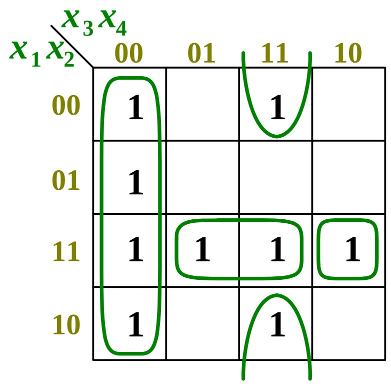


kah **mittelõikuvad** kontuurid

kõik need kontuuridevalikud kasutavad **samapalju samasuuri** kontuure.

Neljast eelnevast kontuuridevalikust võtame puha millise — kuid eelnevad **roheliste** kontuuridega valikud annavad järgnevalt lihtsama teisenduskäigu (kuna **inversioone** tuleb DNK-sse vähem).

eelistades eelnäidatud rohelisi kontuuridekomplekte, võtame *polünoomi l ä h t e a v a l d i s e* jaoks nendest kahest suvalise, näiteks e s i m e s e kontuurivaliku :



kaetud **mittelõikuvate** kontuuridega

Kirjutame välja s e l l e s t kontuuridevalikust tuleneva DNK :

$$f = \bar{x}_3\bar{x}_4 \vee x_1x_2x_4 \vee x_1x_2x_3\bar{x}_4 \vee \bar{x}_2x_3x_4 = \ldots.$$

selles avaldises võib kõik **disjunktsioonid** *asendada tehtega* $\oplus$
(*ilma et avaldise tõeväärtustabel sellest muutuks :*)

$$\ldots. = \bar{x}_3\bar{x}_4 \oplus x_1x_2x_4 \oplus x_1x_2x_3\bar{x}_4 \oplus \bar{x}_2x_3x_4 = \ldots.$$

? miks tohib nii asendada (*ilma et avaldise seeläbi "ära rikuksime"*) **?**

meenutame:

vastavalt tehete $\oplus$ *ja* $\vee$ *omadustele olid nad ühel tingimusel* **samaväärsed** :
nende asendatavus teineteisega olenes sellest, **mitu tk** *on (sellel hetkel) avaldises liidetavaid väärtusi* **1** :

$$1 \vee 0 \vee 0 = 1 \oplus 0 \oplus 0$$ (**paaritu arv** ühtesid)

$$1 \vee 1 \vee 0 \neq 1 \oplus 1 \oplus 0$$ (**paarisarv** ühtesid)

$$1 \vee 1 \vee 1 = 1 \oplus 1 \oplus 1$$ (**paaritu arv** ühtesid)

(illustratsioon olukorrale, kus $\oplus$ ja $\vee$ tohib asendada teineteiseks :)

polünoomi lähteavaldise (**DNK**) jaoks olid valitud need kontuurid :

$x_1x_2 \backslash x_3x_4$	00	01	11	10
00	0000	0001	0011	0010
01	0100	0101	0111	0110
11	1100	1101	1111	1110
10	1000	1001	1011	1010

(see kaart **ei ole** lahenduse osa)

polünoomi lähteavaldisena leitud DNK-s ei väärtustu <u>*mitu*</u> *konjunktsiooni samaaegselt* **1**-*ks mitte kunagi*

(*ehk mitte ühegi* **16**ne *argumentvektori korral* **0000** *kuni* **1111** :)

$$f \;=\; \bar{x}_3\bar{x}_4 \;\vee\; x_1x_2x_4 \;\vee\; x_1x_2x_3\bar{x}_4 \;\vee\; \bar{x}_2x_3x_4 \;=$$

selle DNK konjunktsioonid väärtustuvad erinevate argumentvektorite korral :

nii :	1	$\vee$	0	$\vee$	0	$\vee$	0
või nii :	0	$\vee$	1	$\vee$	0	$\vee$	0
või nii :	0	$\vee$	0	$\vee$	1	$\vee$	0
või nii :	0	$\vee$	0	$\vee$	0	$\vee$	1
või nii :	0	$\vee$	0	$\vee$	0	$\vee$	0

. . . . seega tohimegi asendada sellise DNK kõik disjunktsioonitehted : $\vee \;\; \oplus$

$$\ldots = \bar{x}_3\bar{x}_4 \oplus x_1x_2x_4 \oplus x_1x_2x_3\bar{x}_4 \oplus \bar{x}_2x_3x_4 = \ldots$$

edasi asendame **inversioonid** *asendusseosega* $\bar{x} = x \oplus 1$

$$= (x_3\oplus 1)(x_4\oplus 1) \oplus x_1x_2x_4 \oplus x_1x_2x_3(x_4\oplus 1) \oplus (x_2\oplus 1)x_3x_4 =$$

$$= x_3x_4 \oplus x_3 \oplus x_4 \oplus 1 \oplus x_1x_2x_4 \oplus x_1x_2x_3x_4 \oplus x_1x_2x_3 \oplus$$

$$\oplus\; x_2x_3x_4 \oplus x_3x_4 \;=$$

see ongi **polünoom**avaldise kuju.... kuid üks "probleem" on siin... ?

arvestades et : $x \oplus x = 0$ ja $x \oplus 0 = x$

$$= x_3 \oplus x_4 \oplus x_1x_2x_4 \oplus x_1x_2x_3x_4 \oplus x_1x_2x_3 \oplus x_2x_3x_4 \oplus 1$$

. . . . l a h e n d a t u d : polünoom leitud

! *tüüpiline viga:*

kuigi : $x \vee x = x$ siis $x \oplus x \neq x$

(meenutame : $x \oplus x = 0$)

! *tüüpiline viga:*

kuigi : $x \vee xy = x$ siis $x \oplus xy \neq x$

(meenutame : **neeldumist** <u>ei esine</u> tehte $\oplus$ korral)

! *harvem viga:*

sulud $(x_3 \oplus 1)(x_4 \oplus 1)$ korrutatakse ekslikult lahti avaldiseks :

$x_3x_4 \oplus x_3 \oplus x_4$ . . . . . aga lahtikorrutamise **õige** tulemus on :

$x_3x_4 \oplus x_3 \oplus x_4 \oplus 1$

? *kuidas saaks polünoomavaldise õigsust (pealiskaudselt) kontrollida ?*

selleks huvitume, milleks arvutub leitud polünoomavaldis argumentide **0000** ja **1111** korral :

$$f(0000) = ? \qquad\qquad f(1111) = ?$$

$$x_3 \oplus x_4 \oplus x_1x_2x_4 \oplus x_1x_2x_3x_4 \oplus x_1x_2x_3 \oplus x_2x_3x_4 \oplus 1$$

$x_1x_2 \backslash x_3x_4$	00	01	11	10
00	1		1	
01	1			
11	1	1	1	1
10	1		1	

f(0000) f(1111)

. . . . pealiskaudne kontroll viitab, et see polünoom **võib** *olla õige*

f(0000) = 1 / 0 näitab kätte

konstant 1 vajaduse / puudumise polünoomavaldises

ja

f(1111) = 0 / 1 näitab kätte

polünoomi **liikmete arvu** (*paarisarv* või *paaritu arv* liiget polünoomis):

$$x_3 \oplus x_4 \oplus x_1x_2x_4 \oplus x_1x_2x_3x_4 \oplus x_1x_2x_3 \oplus x_2x_3x_4 \oplus 1$$

? *. . . aga kui* **0000** *või* **1111** *on juhtumisi* **määramatuspiirkond** ?

pärast **MDNK** leidmist **pole enam olemas** määramatuspiirkonda **!**

kodutöös peab olema loogiline **võrdsus** : **polünoom = MDNK**

? **miks ei tohi MDNK avaldises tehet** $\vee$ **asendada tehteks** $\oplus$ **?**

$x_1x_2 \backslash x_3x_4$	00	01	11	10
00	0000	0001	0011	0010
01	0100	0101	0111	0110
11	1100	1101	1111	1110
10	1000	1001	1011	1010

MDNK jaoks olid kontuurid

selle võimaluse rikub ära argumentvektor **1100** mille ruut on kaetud **kahe** kontuuriga (ehk on kaetud "*kahekordselt*" : **paarisarv**-kordselt).

MDNK-avaldises :

$$f = \bar{x}_3\bar{x}_4 \vee x_1x_2 \vee \bar{x}_2x_3x_4$$

. . . . väärtustuvad MDNK elementaarkonjunktsioonid **1100** korral selliselt:

$$f(1100) = 1 \vee 1 \vee 0$$

$$f(1100) = 1 \vee 1 \vee 0 \neq 1 \oplus 1 \oplus 0$$

? **kas MDNK jaoks leidub mingi lihtne muudatus, mille tulemusel MDNK modifitseerub kujule**

kus tehet $\vee$ **tohib ikkagi asendada tehteks** $\oplus$ **?**

JAH LEIDUB

Kontuuride valimise reegel polünoomi lähteDNK leidmiseks nõuab, et kõik **1**-d peavad olema kaetud kontuuridega **paaritu** arv kordi.

Kui kontuurid kattuvad üksteisega nii, et mingid ruudud on kaetud **2**-kordselt (4-kordselt), siis saab alati valida samade ruutude katmiseks juurde **veel ühe täiendava kontuuri**, koos millega on needsamad **1**-de ruudud kaetud juba **3**-kordselt (5-kordselt) :

x_1x_2 \ x_3x_4	00	01	11	10
00	1		1	
01	1			
11	1	1	1	1
10	1		1	

ühtede piirkond kaetud **1-kordselt** või **3-kordselt**

siit kontuurivalikust saame DNK :

$$f = \bar{x}_3 \bar{x}_4 \lor x_1 x_2 \lor \bar{x}_2 x_3 x_4 \lor x_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4$$

$$f(1100) = 1 \lor 1 \lor 0 \lor 1 =$$
$$= 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1$$

seega

$$f = \bar{x}_3 \bar{x}_4 \oplus x_1 x_2 \oplus \bar{x}_2 x_3 x_4 \oplus x_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4$$

. . . . ehk selline DNK sobib kah *Reed-Mulleri polünoomi* leidmise lähteavaldiseks.

kui mõlemad eelvaadatud DNK-d sobivad — siis **kumba eelistada** ?
võrdleme mõlema eelvaadeldud lähte-DNK keerukust :

kordame *mittelõikuvatest* kontuuridest eespool saadud DNK-d
(mille eelnevalt teisendasimegi edasi polünoomiks.... see oli :)

$$f = \bar{x}_3 \bar{x}_4 \lor x_1 x_2 x_4 \lor x_1 x_2 x_3 \bar{x}_4 \lor \bar{x}_2 x_3 x_4$$

(mittelõikuvatest kontuuridest tulnud selle avaldise keerukus : **12** algtermi)

1-kordse ja *3-kordse* katmiskordsusega kontuuridevalikust nüüd saadud DNK :

$$f = \bar{x}_3 \bar{x}_4 \lor x_1 x_2 \lor \bar{x}_2 x_3 x_4 \lor \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 x_4$$

(selle avaldise keerukus : **11** algtermi kuid **inversioone** on siin rohkem **!**)

. . . . vaatamata väiksemale keerukusele (11) ei ole MDNK modifitseeritud variant eelistatum, kuna iga täiendav *inversioon* lisab teisendusmahtu . . . .

iseseisvaks lahendamiseks :

Leida samale funktsioonile **Reed-Mulleri polünoom** lähtudes eelvaadatud kontuuridevalikust (mis kasutab ka *3-kordset* katmist) :

x_1x_2 \ x_3x_4	00	01	11	10
00	1		1	
01	1			
11	1	1	1	1
10	1		1	

. . . . ehk lähtudes siit väljakirjutatud DNK-avaldisest :

$$f = \bar{x}_3 \bar{x}_4 \lor x_1 x_2 \lor \bar{x}_2 x_3 x_4 \lor x_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4$$

$$f = \bar{x}_3 \bar{x}_4 \oplus x_1 x_2 \oplus \bar{x}_2 x_3 x_4 \oplus x_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 =$$

. . . . edukal teisendamisel (teistsugust teed pidi) peab tulema sama eelnevalt saadud polünoomavaldis :

$$\ldots = x_3 \oplus x_4 \oplus x_1 x_2 x_4 \oplus x_1 x_2 x_3 x_4 \oplus x_1 x_2 x_3 \oplus x_2 x_3 x_4 \oplus 1$$

NULLIDE ruutude kaasamisvõimalus kontuuridesse !

. . . . *misasja !?* . . . . **nulle ?** . . . . . ja **ühtede** kontuuridesse **?**

pane tähele: kõige üldisem kontuurivaliku reegel **polünoomi** lähteavaldise jaoks :

ühed tuleb kontuuridega katta **PAARITUarv**-kordselt ja
nullid tuleb / tohib kontuuridega katta **PAARISarv**-kordselt **!**

kusjuures: kui *nullid* on kontuuridega üldse katmata (nagu eelmistes näidetes oligi), siis nad on kaetud "**0**-kordselt" — mis on kah **paaris**arv.

seega sõnastus : "**ühed** katta m i t t e l õ i k u v a t e kontuuridega (ehk katta ü h e k o r d s e l t) ja **nullid** jätta katmata" on erijuhtum eelnevast üldreeglist

näide :

. . . vaatame mingi suvalise funktsiooni tõeväärtustabelit 4-muutuja kaardil :

$x_1x_2 \backslash x_3x_4$	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	1	1	0
11	1	0	1	0
10	1	1	0	0

ühtede piirkond kaetud **PAARITUarv-kordselt**
ehk 1-kordselt
nullide piirkond kaetud **PAARISarv-kordselt**
ehk 0-kordselt

sobiv valik — aga selle funktsiooni jaoks EBASOODNE

selle funktsiooni polünoomi lähteavaldiseks **parim kontuuridevalik :**

$x_1x_2 \backslash x_3x_4$	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	1	1	0
11	1	0	1	0
10	1	1	0	0

ühtede piirkond kaetud **PAARITUarv-kordselt**
ja
nullide piirkond kaetud **PAARISarv-kordselt :**
0-kordselt ja 2-kordselt

pane tähele: kui võtame kontuuri koosseisu ka **nulle**, siis ei sobi selliseid kontuure enam nimetada "**ühtede kontuurideks**".

Nende nimeks sobiks : "**polünoomi lähteavaldise kontuurid**"

Eelnevast kontuurivalikust saaksime *polünoomi lähteavaldiseks* :

$$f = x_1\bar{x}_3 \oplus x_2x_4 = \ . \ . \ .$$

nullide kaasamine on võimalik juhtumil, kus **kahte kontuuri korraga** saab suurendada <u>samade</u> *nullide* peale :

$x_1x_2 \backslash x_3x_4$	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	1	1	0
11	1	0	1	0
10	1	1	0	0

juhtumisi saab neid **kahte** kontuuri samaaegselt kasvatada nulli katma

näide:

$x_1x_2 \backslash x_3x_4$	00	01	11	10
00	1	0	1	
01	1	0	1	
11				
10				

juhtum kus polünoomi leidmisel juba valitud **2** kontuuri õnnestub koos kasvatada **samu nulle** katma

? *miks tohib polünoomi leidmisel* ***0****-de ruute niimoodi 2-kordselt (4-kordselt) katta kontuuridega ?*

see võimalus tuleneb asjaolust: $1 \oplus 1 = 0$

1-de kontuurid mis katavad ka **0**-lle (ehk nende *elementaarkonjunktsioonid*) arvutavad **mõlemad** enda väärtuseks "**1**" — **selle** argumentvektori korral, mis tegelikult on <u>*nullide piirkonna* oma</u>. Seljuhul toimub polünoomavaldises $1 \oplus 1$ mis annab tulemuseks ikkagi õige väärtuse **0**

näide:

$x_1x_2 \backslash x_3x_4$	00	01	11	10
00		1		
01	1	0	1	
11		1		
10				

juhtum kus polünoomi leidmisel juba valitud **4** kontuuri õnnestub koos kasvatada **nulli** katma

suurendades kõik **4** kontuuri **2-ruuduliseks** (ruudu **0** peale) , tekkib (siin näites) argumentvektori **0101** korral polünoomavaldises olukord :

$$f(0101) = 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus \ldots\ldots\ldots = 0$$

. . . . nagu peabki

ülesanne:

Leida **Reed-Mulleri polünoom** järgneval kaardil esitatud 4-muutuja funktsioonile lähtudes kaardil valitud / näidatud <u>neljaruudulistest</u> kontuuridest :

x_1x_2 \ x_3x_4	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	1	1	0
11	1	0	1	0
10	1	1	0	0

$$f \;=\; x_1\bar{x}_3 \;\vee\; x_2x_4 \;=\; x_1\bar{x}_3 \;\oplus\; x_2x_4 \;=$$

$$=\; x_1(x_3 \oplus 1) \;\oplus\; x_2x_4 \;=\; x_1x_3 \;\oplus\; x_1 \;\oplus\; x_2x_4$$

. . . . l a h e n d a t u d :   polünoom leitud

(. . . . nii lühike / lihtne oligi . . .)

iseseisvaks lahendamiseks :

Leida seesama **Reed-Mulleri polünoom** varasemal kaardil olnud <u>ebaoptimaalsemast</u> kontuurivalikust lähtudes :

(ehk : tuvasta kas teistsugune / pikem lahendustee annab siin sama tulemuse ?)

x_1x_2 \ x_3x_4	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	1	1	0
11	1	0	1	0
10	1	1	0	0

ühtede piirkond kaetud **PAARITUarv-kordselt**
ehk 1-kordselt
nullide piirkond kaetud **PAARISarv-kordselt**
ehk 0-kordselt

(kah sobiv kontuuridevalik — aga eelmisest ebasoodsam)

$$f = x_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \;\oplus\; x_1x_2x_3x_4 \;\oplus\; \bar{x}_1x_2x_4 \;\oplus\; x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 =$$

$$= \;\; . \;\; =$$

$$= \; x_1x_3 \;\oplus\; x_1 \;\oplus\; x_2x_4$$

(kõik õiged lahendusteed peavad andma sama tulemuse)