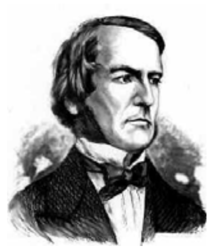
Loogikaalgebra (Boole'i algebra)



George **Boole** (1815 — 1864)

Sündinud Inglismaal Lincolnis. 16-aastasena tegutses kooliõpetaja assistendina. Õppis 5 aastat iseseisvalt omal käel matemaatikat, keskendudes hiljem algebrale. 1835 avas oma kooli.

Uudse lähenemisega loogikale korrastas selle kaasaegseks *loogikaalgebraks*.

Loogikaalgebra $(\{0,1\};\ \overline{},\ \wedge, \vee)$ koosneb loogikaväärtuste hulgast $\{0,1\}$, millel on defineeritud 3 *elementaarset loogikatehet*: unaarne tehe **inversioon** ja binaarsed tehted **konjunktsioon** ja **disjunktsioon**.

Kõik 3 elementaarset loogikatehet on juba eelpool lausearvutuse juures defineeritud ja loogikaalgebras kehtivad nad täpselt samal kujul.

Muutuja x või x_i on **loogikamuutuja**, kui ta saab omandada väärtusi ainult hulgast $\{0\ \ 1\}$. $\quad x_i \in \{x_1\ \ x_2 \dots x_n\}$

Numbrimärkidena **0** ja **1** esitatud loogikaväärtusi nimetatakse ka "*konstant 0*" ja "*konstant 1*", et rõhutada nende erinevust *muutujatest* x_i .

Loogikaavaldis on *loogikamuutujaid* x_i , *konstante* **0 1** ja *tehtemärke* sisaldav kooslus, mis tema muutujate x_i väärtustamisel omandab (loogikatehete teostamise järel) samuti loogikaväärtuse **0** või **1** .

Loogikaavaldis sarnaneb lausearvutuses kasutatavale *lausearvutusvalemile* ning ta defineeritakse analoogiliselt:

definitsioon:

- **loogikamuutuja** x_i **ja konstandid 0 1 on loogikaavaldised;**
- **kui A on loogikaavaldis, siis on avaldised ka** $\overline{A}$ **ja** (A)
- **kui A ja B on loogikaavaldised, siis on avaldised ka**

  $A \wedge B \qquad A \vee B \qquad A \rightarrow B \qquad A \leftrightarrow B \qquad A \oplus B$
- *tehtemärgi puudumine operandide vahel on samaväärne tehtega* $\wedge$

ehk konjunktsiooniga : $AB \equiv A \wedge B \equiv A \cdot B$

Eelnev definitsioon välistab loogikaavaldiste hulgast ebakorrektsed operandide ja tehtemärkide kooslused: $A \wedge \vee B \qquad AB \leftrightarrow \qquad A(\rightarrow)B$

<u>konstantide korrutamisel</u> (*konjunktsioon*) on siiski vaja ka tehtemärk äranäidata :

kirjutis : **0 1** ei esita arusaadaval viisil *nulli* ja *ühe* **konjunktsiooni** ;

konstantide konjunktsioon sobib väljendada kujul : $0 \wedge 1$ või $0 \cdot 1$

Loogikaavaldis omandab / **arvutab loogikaväärtuse 0** või **1** , kui tema loogikamuutujad väärtustada konkreetseteks väärtusteks (0 1) ja teostada avaldise loogikatehted.

Loogikatehete prioriteet

Kui sulgudega pole tehete järjekord avaldises määratud teisiti, siis määrab tehete teostusjärjekorra **loogikatehete prioriteedijärjestus** :

$\overline{} \qquad \wedge \qquad \vee \qquad \rightarrow \qquad \leftrightarrow$

üksiku loogikamuutuja **inversioon** teostatakse avaldistes kõikjal esimesena. Nagu aritmeetikas, nii on ka loogikas korrutamine (*konjunktsioon*) prioriteetsem kui liitmine (*disjunktsioon*).

Loogikaavaldiste võrdsus

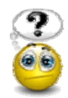
Kaks erinevat loogikaavaldist on võrdväärsed ehk **loogiliselt võrdsed** , kui nad mõlemad omandavad muutujate (kõikvõimalike) samade väärtuskombinatsioonide korral sama loogikaväärtuse **0** või **1** .

teiste sõnadega: loogikaavaldised / loogikafunktsioonid on teineteisega **loogiliselt võrdsed**, kui nende **tõeväärtustabelid on täpselt samasugused**

näide: $\quad x_1 \overline{x_2} \vee x_2 \quad = \quad x_1 \vee \overline{x_1} x_2$

Asendades siin muutujate x_1 ja x_2 asemele mingid loogikaväärtused, väärtustuvad võrduse mõlema poole avaldised alati ühtemoodi **0**-ks või ühtemoodi **1**-ks :

ülesanne:



Kontrollida eelpoolsete avaldiste $x_1 \overline{x_2} \vee x_2$ ja $x_1 \vee \overline{x_1} x_2$ **loogilist võrdsust** nende tõeväärtustabelite võrdlemise teel :

$x_1 x_2$	$x_1 \bar{x}_2 \vee x_2$	$x_1 \vee \bar{x}_1 x_2$
0 0		
0 1		
1 0		
1 1		

$x_1 x_2$	$x_1 \bar{x}_2 \vee x_2$	$x_1 \vee \bar{x}_1 x_2$
0 0	**0**	**0**
0 1	**1**	**1**
1 0	**1**	**1**
1 1	**1**	**1**

iseseisev vabatahtlik kodune lahendamine:

- arvuta loogikaavaldisele $x_1 \vee \bar{x}_1 x_2$ tema tõeväärtustabel ja tuvasta, kas see juhtub olema samasugune nagu oli avaldise $x_1 \bar{x}_2 \vee x_2$ tunnis leitud tõeväärtustabel :

$x_1 x_2$	$x_1 \bar{x}_2 \vee x_2$	$x_1 \vee \bar{x}_1 x_2$
0 0	0	**?**
0 1	1	**?**
1 0	1	**?**
1 1	1	**?**

Loogikaavaldised **2-muutuja loogikafunktsioonid** $f(x_1 x_2)$

olulisi mõisteid :

Loogikafunktsioon seab oma *määramispiirkonna* igale **2nd**vektorile (ehk *ühtede* ja *nullide* "komplektile") vastavaks loogikaväärtuse **0** või **1**.

näiteks: $f(0\,1\,1) = 0$ või teine võimalus : $f(011) = 1$

Kui **2nd**vektor on loogikafunktsiooni argumendiks, siis sellist **2nd**vektorit nimetame ka **argumentvektoriks**.

1de piirkonna moodustavad need argumentvektorid, mille korral funktsioon väärtustub **1**-ks.

0de piirkonna moodustavad need argumentvektorid, mille korral funktsioon väärtustub **0**-ks.

näitena eelmine avaldis ja tema tõeväärtustabel :

vaadeldes avaldist $x_1 \bar{x}_2 \vee x_2$ 2-muutuja loogikafunktsioonina :

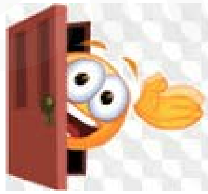
$$f(x_1 x_2) = x_1 \bar{x}_2 \vee x_2$$

$x_1 x_2$	$x_1 \bar{x}_2 \vee x_2$
0 0	**0**
0 1	**1**
1 0	**1**
1 1	**1**

. . . siis selle funktsiooni

nullide piirkonnaks on *argumentvektor* **00** üksi ;

ühtede piirkonnaks on siin *argumentvektorid* **01 10 11** ;



eelistatuim avaldisekuju: Disjunktiivne Normaalkuju (DNK)

1-de piirkonnast saab välja kirjutada loogikafunktsioonile tema kõige eelistatuma avaldisekuju: **disjunktiivse normaalkuju** (DNK)

algtermiks nimetatakse loogikaavaldise igat *üksikut loogikamuutujat* või selle *inversiooni* : x_i $\bar{x}_i$

(. . . . ehk loogikamuutuja iga üksik "eksemplar" avaldises)

näide:

eelvaadatud avaldises $x_1 \vee \bar{x}_1 x_2$ on 2 loogikamuutujat : x_1 x_2 kuid **3** *algtermi* ;

avaldises $(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1) x_2 \vee \bar{x}_2$ sisaldub samuti 2 loogikamuutujat kuid **4** *algtermi*

elementaarkonjunktsioon on *algtermide konjunktsioon*

näide:

järgneval real on **5** erinevat *elementaarkonjunktsiooni* :

$x_3\, x_4$ $\qquad$ $\overline{x}_1\, x_2\, x_4$ $\qquad$ x_2 $\qquad$ $\overline{x}_1\, x_2\, \overline{x}_3\, x_4$ $\qquad$ $\overline{x}_1\, \overline{x}_3\, \overline{x}_5$

disjunktiivne normaalkuju (**DNK**) on
elementaarkonjunktsioonide disjunktsioon

näiteks:

$$x_3\, x_4 \quad \vee \quad \overline{x}_1\, x_2\, x_4 \quad \vee \quad x_2$$

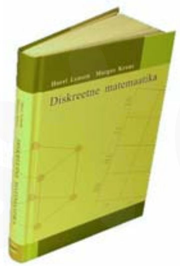
ülesanne:

Esitada igale järgnevale tõeväärtustabelile f_e f_t f_k f_n f_v
1 . . . . 3 erinevat sobivat kuni 4 algtermiga **loogikaavaldist**:
eristame funktsioone üksteisest suvaliste indeksitega :

$x_1\, x_2$	f_e	f_t	f_k	f_n	f_v
0 0	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**
0 1	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**
1 0	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**
1 1	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**

$x_1\, x_2$	f_e	f_t	f_k	f_n	f_v
0 0	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**
0 1	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**
1 0	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**
1 1	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**
	vastus: $\overline{x_1 \to x_2}$ $x_1\, \overline{x}_2$	*vastus:* $x_1 \leftrightarrow x_2$ $\overline{x}_1\, \overline{x}_2 \vee x_1\, x_2$ $\overline{\overline{x}_1\, x_2 \vee x_1\, \overline{x}_2}$	*vastus:* $x_2 \to x_1$ $\overline{x}_1 \to \overline{x}_2$ $\overline{\overline{x}_1\, x_2}$	*vastus:* $\overline{x}_2$ $\overline{x}_1\, \overline{x}_2 \vee x_1\, \overline{x}_2$	*vastus:* **1**

iseseisev vabatahtlik kodune lahendamine :



rohelise õpiku **lk. 26** kaks ülesannet :

- Kontrollida, kas A ja B kõikvõimalike väärtuskombinatsioonide korral kehtib võrdus

$$[\,(A \to B)\ \wedge\ (B \to A)\,] \quad = \quad A \leftrightarrow B$$

selleks arvuta võrduse *vasaku* poole avaldise jaoks tema 4-realine tõeväärtustabel ja võrdle seda võrduse *parema* poole avaldise (ehk **ekvivalentsi**) tõeväärtustabeliga

- Kontrollida, kas A B C kõikvõimalike väärtuskombinatsioonide korral kehtib võrdus

$$[\,(A \to B)\ \wedge\ (B \to C)\,] \quad = \quad A \to C$$

selleks arvuta võrduse mõlema poole avaldise jaoks tema 8-realine tõeväärtustabel ja võrdle neid

ülesanne:

Arvutada **tõeväärtustabel** 3-muutuja loogikafunktsioonile:

$$f(x_1 x_2 x_3) = (x_3 \rightarrow x_1)\,\bar{x}_2 \vee (\bar{x}_1 \leftrightarrow x_2)$$

$$f(x_1 x_2 x_3) = (x_3 \rightarrow x_1)\,\bar{x}_2 \vee (\bar{x}_1 \leftrightarrow x_2)$$

$x_1\, x_2\, x_3$	$f(x_1\, x_2\, x_3)$
0 0 0	**1**
0 0 1	**0**
0 1 0	**1**
0 1 1	**1**
1 0 0	**1**
1 0 1	**1**
1 1 0	**0**
1 1 1	**0**

iseseisev vabatahtlik kodune lahendamine :

$$f(x_1 x_2 x_3) = (x_3 \rightarrow x_1)\,\bar{x}_2 \vee (\bar{x}_1 \leftrightarrow x_2)$$

eelmise loogikaavaldise 8-realisest tõeväärtustabelist arvutasime välja tunnis ainult tema 3 rida. Leia / arvuta tema tõeväärtustabeli ülejäänud **5 rida** :

$x_1\, x_2\, x_3$	$f(x_1\, x_2\, x_3)$
0 0 0	1
0 0 1	0
0 1 0	**?**
0 1 1	**?**
1 0 0	**?**
1 0 1	**?**
1 1 0	0
1 1 1	**?**

Loogikaavaldiste duaalsus

Loogikaavaldis omandab oma *duaalse* kuju, kui

- avaldise kõik *konjunktsioonid* asendada *disjunktsiooniga*
- avaldise kõik *disjunktsioonid* asendada *konjunktsiooniga*
- avaldise kõik *konstandid* **0** asendada *konstandiga* **1**
- avaldise kõik *konstandid* **1** asendada *konstandiga* **0**

(**inversioone** ei asendata duaalsele kujule üleminnes)

Duaalsele kujule üleminnes **tehete järjekord avaldises ei tohi muutuda** (ehk *duaalses* avaldises tuleb rakendada **s u l u d**)

näide:

avaldise $x_1 \bar{x}_2 \vee x_3$ jaoks tema *duaalne* avaldis on :

$$(x_1 \vee \bar{x}_2)\, x_3$$

näide:

võrduse $x_1 \bar{x}_2 \vee x_3 = 0$ jaoks tema *duaalne* võrdus on :

$$(x_1 \vee \bar{x}_2)\, x_3 = 1$$

Kui duaalse avaldise jaoks leida v e e l k o r d duaalne avaldis, siis saadakse esialgne avaldis tagasi.

Seega *duaalsed* avaldised ja võrdused on v a s t a s t i k k u duaalsed :

"*duaalsete avaldiste paar*" "*duaalsete võrduste paar*"

duaalsusprintsiip

Loogikaavaldiste kohta kehtib ***duaalsusprintsiip*** :

Kui 2 loogikaavaldist on v õ r d s e d , siis on ka nende duaalsed avaldised omavahel v õ r d s e d :

$$\mathrm{A} \;=\; \mathrm{B}$$

erinevad kuid VÕRDSED avaldised

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$$\mathrm{A_d} \qquad \mathrm{B_d}$$

mõlemale leitud tema DUAALNE kuju...

$$\mathrm{A_d} \;=\; \mathrm{B_d}$$

....ka duaalsed avaldisekujud on teineteisega VÕRDSED

Loogikaalgebra põhiseosed

Duaalsusprintsiibist tulenevalt kehtivad kõik **loogikaalgebra põhiseosed** *duaalsete* paaridena.

Loogikaalgebra põhiseosed esituvad kuni 3 loogikamuutuja abil, mida tähistame siin $x \quad y \quad z$. *Neid muutujatähiseid on põhiseoste esitamisel kasutatud indeksite vältimiseks ehk nad on* $x_1 x_2 x_3$ *asemel*

Igaüks nendest on tegelikult loogikaväärtus **0** või **1** : $x, y, z \in \{\,\mathbf{0}\ \mathbf{1}\,\}$

Järgnevad võrdused (põhiseosed) kehtivad olenemata sellest, kumba loogikaväärtuse (**0** või **1**) me nendes iga loogikamuutuja $x \quad y \quad z$ asemele asendame.

Põhiseoste kehtivus tuleneb elementaarsete loogikatehete definitsioonidest :

	konjunktsioon	**disjunktsioon**
$x\ y$	$x \wedge y$	$x \vee y$
0 0	**0**	**0**
0 1	**0**	**1**
1 0	**0**	**1**
1 1	**1**	**1**

L O O G I K A A L G E B R A   P Õ H I S E O S E D

kommutatiivsus :

verbaalselt :

" **tehte** tulemus ei olene **operandide** järjekorrast "

$$x \vee y \;=\; y \vee x \qquad\qquad x \wedge y \;=\; y \wedge x$$

korrutamise ja *liitmise* k o m m u t a t i i v s u s nähtub nende tehete tõeväärtustabelite k e s k m i s t e s t ridadest — kus on mõlemal real tehtetulemusena s a m a loogikaväärtus :

	konjunktsioon	**disjunktsioon**
$x\ y$	$x \wedge y$	$x \vee y$
0 0	0	0
0 1	**0**	**1**
1 0	**0**	**1**
1 1	1	1

eituse eitamise seadus : $\overline{\overline{x}} = x$

(topelteituse seadus)

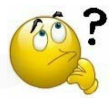
! *tüüpiline viga :*

selles avaldises **ei ole** *topeltinversiooni* :

$$\overline{x_1 \overline{x_2}}$$

seega

$$\overline{x_1}\, x_2 \;\neq\; \overline{x_1 \overline{x_2}}$$



. . . kuidas teame, et nad **ei ole** võrdsed ?

juhul kui nad **on** võrdsed, siis peavad mõlemad avaldised väärtustuma samade muutujaväärtuste korral alati samamoodi : **0** ja **0** / **1** ja **1**

$x_1 x_2$	$\overline{x_1 \overline{x}_2}$	$\overline{x}_1 x_2$
0 0		
0 1		
1 0		
1 1		

$x_1 x_2$	$\overline{x_1 \overline{x}_2}$	$\overline{x}_1 x_2$
0 0	1	0
0 1	. . . pole enam oluline arvutada . .	. . . pole enam oluline arvutada . .
1 0	. . . pole enam oluline arvutada . .	. . . pole enam oluline arvutada . .
1 1	. . . pole enam oluline arvutada . .	. . . pole enam oluline arvutada . .

seosed konstantidega 0 ja 1 :

$\overline{0} = 1$ $\overline{1} = 0$ $0 \cdot 1 = 0$ $0 \vee 1 = 1$

$x \cdot 0 = 0$ $x \cdot 1 = x$ $x \cdot \overline{x} = 0$

$x \vee 0 = x$ $x \vee 1 = 1$ $x \vee \overline{x} = 1$

eelnevates põhiseostes on näha *duaalsed paarid*

samad eelnevad võrdused, kus iga *duaalne paar* on rõhutatud erinevate värvidega :

$\overline{0} = 1$ $\overline{1} = 0$ $0 \cdot 1 = 0$ $1 \vee 0 = 1$

$x \cdot 0 = 0$ $x \cdot 1 = x$ $x \cdot \overline{x} = 0$

$x \vee 0 = x$ $x \vee 1 = 1$ $x \vee \overline{x} = 1$

idempotentsus :

$x \cdot x = x$ $x \vee x = x$

. . . *idempotentsus* nähtub *konjunktsiooni* ja *disjunktsiooni* tõeväärtustabelite esimesest ja viimasest reast :

	konjunktsioon	disjunktsioon
$x\ y$	$x \wedge y$	$x \vee y$
0 0	0	0
0 1	0	1
1 0	0	1
1 1	1	1

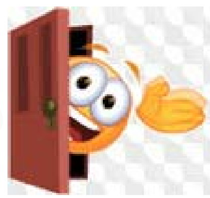
DeMorgani seadused : (kahe muutuja jaoks)

$\overline{x \vee y} = \overline{x}\,\overline{y}$ $\overline{x\,y} = \overline{x} \vee \overline{y}$

DeMorgani seaduste modifikatsioon 3 muutuja jaoks:

$\overline{x \vee y \vee z} = \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}$ $\overline{x\,y\,z} = \overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z}$

. . . kehtib suvalise arvu muutujate jaoks . . .



neeldumine :

$x \vee x\,y = x$ (*"lihtsam" neeldumisseadus*)

sama neeldumise erijuhtumid on ka :

$x \vee x\,\overline{y} = x$

$\overline{x} \vee \overline{x}\,y = \overline{x}$

neeldumine : ("keerulisem" neeldumisseadus)

$$x \vee \bar{x}\,y = x \vee y$$

. . . . meenutame eelmisel tunnil vaadatud teineteisega võrdseid avaldisi :

$x_1 x_2$	$x_1 \bar{x}_2 \vee x_2$	$x_1 \vee \bar{x}_1 x_2$
0 0	**0**	**0**
0 1	**1**	**1**
1 0	**1**	**1**
1 1	**1**	**1**

sama neeldumise $x \vee \bar{x}\,y = x \vee y$ **erijuhtumid** on ka :

$$\bar{x} \vee x\,y = \bar{x} \vee y$$

$$\bar{x} \vee x\,\bar{y} = \bar{x} \vee \bar{y}$$

distributiivsus : (sulgude nn. "lahtikorrutamine" ja "lahtiliitmine")

$$x(y \vee z) = xy \vee xz \qquad x \vee (yz) = (x \vee y)(x \vee z)$$

. . . võrduse mõlema poole avaldise t õ e v ä ä r t u s t a b e l osutub samaks :

$x\,y\,z$	$x(y \vee z)$	$xy \vee xz$
0 0 0	0	0
0 0 1	0	0
0 1 0	0	0
0 1 1	0	0
1 0 0	0	0
1 0 1	1	1
1 1 0	1	1
1 1 1	1	1

kleepimine : (ebaolulise muutuja / avaldiseliikme lisamine)

$$x = xy \vee x\bar{y} \qquad x = (x \vee y)(x \vee \bar{y})$$

Neeldumisseaduste olemus

Lisame veel ühe märkuse *neeldumisseadusele* $x \vee \bar{x}y = x \vee y$
Selle reegli verbaalseks esituseks sobiks:

"disjunktsiooni ühele poolele võib juurde korrutada teise poole inversiooni *(avaldise väärtust sellega muutmata)".*

Seega kehtivad võrdused:

$x \vee y = x \vee y\bar{x}$ ning samuti $x \vee y = x\bar{y} \vee y$

ehk

$x \vee \bar{x}y = x \vee y = x\bar{y} \vee y$

Neeldumise $x \vee xy = x$ kehtivust kinnitab ka teisendus, kus ühine tegur x tuuakse võrduse vasakus pooles sulgude ette, misjuhul sulgudesse jääb konstant **1** : $x \vee xy =$ . . . .

$x \vee xy = x(1 \vee y) = x(1) = x$

pane tähele: $x \vee xy = x(1 \vee y)$ on korrektne teisendussamm, kuna sulgude lahtikorrutamisel $x(1 \vee y)$ tekkib taas avaldis $x \vee xy$

Neeldumisvõrduste $x \vee \bar{x}y = x \vee y$
ja $x\bar{y} \vee y = x \vee y$
kehtivus on tõestatav ka nende võrduste parema poole avaldise teisendamise teel vasaku poole avaldiseks.

Arvestades, et $x \vee \bar{x} = 1$ saame *distributiivsusseaduse* (sulgude lahtikorrutamise) abil ja *neeldumise* $x \vee xy = x$ abil teisendada:

$$x \vee y = (x \vee y) \cdot 1 = (x \vee y) \cdot (x \vee \bar{x}) =$$
$$= xx \vee yx \vee x\bar{x} \vee y\bar{x} =$$
$$= x \vee xy \vee 0 \vee y\bar{x} = x \vee \bar{x}y$$

Seega saime: $x \vee y = \ldots\ldots\ldots = x \vee \bar{x} y$

Rõhutame, et eelnevad tähised x y z esitavad mitte ainult üksikuid loogikamuutujaid, vaid x y z asemel võivad olla ka keeruka(ma)d loogikaavaldised, kuna ka avaldised arvutuvad / asenduvad loogikaväärtusteks **0** või **1** .

näide:

neeldumisseadusest $x \vee x y = x$ tuleneb, et neeldumine toimub ka näiteks avaldises $x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 x_4 \bar{x}_5$:

$$x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 x_4 \bar{x}_5 = (x_1 \bar{x}_2 x_3) \vee (x_1 \bar{x}_2 x_3)[x_4 \bar{x}_5] = x_1 \bar{x}_2 x_3$$

eelnevad põhiseosed sisaldasid ainult *elementaarseid loogikatehteid*

$\overline{}$ $\wedge$ $\vee$

? . . . aga miks ei olnud põhiseoste hulgas **duaalseid** *neeldumisseadusi* ?

tõepoolest — *duaalsed neeldumisseadused* oleks :

$x \vee x y = x$ jaoks duaalne : $x(x \vee y) = x$

$x \vee \bar{x} y = x \vee y$ jaoks duaalne : $x(\bar{x} \vee y) = x y$

mõlema neeldumise *duaalsed* kujud osutuvad teisenduste jaoks mittevajalikeks, kuna **sulgude lahtikorrutamine** (võrduse vasaku poole avaldises) annab otsekohe sellesama tulemuse, mida *duaalse neeldumisseaduse* parema poole avaldis näitab.

Loogikatehete asendusseosed

Asendusseosed asendavad *mitteelementaarseid* loogikatehteid

implikatsioon: $\rightarrow$

ekvivalents: $\leftrightarrow$

summa mooduliga 2: $\oplus$ (ka *"välistav VÕI"* *XOR*)

(*see tehe on käsitletud edaspidi*)

...elementaarsete loogikatehete (*inversioon, disjunktsioon, konjunktsioon*) kaudu:

implikatsiooni asendusseos :

$x \rightarrow y = \bar{x} \vee y$ (*kontrollida tõeväärtustabelite võrdlemise teel* **!**)

meenutuseks *implikatsiooni* tõeväärtustabel :

	inversioon	konjunktsioon	disjunktsioon	implikatsioon	ekvivalents
$x_1\ x_2$				$x_1 \rightarrow x_2$	
0 0	1	0	0	**1**	1
0 1	1	0	1	**1**	0
1 0	0	0	1	**0**	0
1 1	0	1	1	**1**	1

ehk :

$$x_1 \rightarrow x_2 = \bar{x}_1 \vee x_2$$

ekvivalentsi asendusseosed :

meenutame :

ekvivalentsi korral on mõlemad tema operandid samaaegselt teineteise *eelduseks* ja *järelduseks* :

$x \leftrightarrow y = (x \rightarrow y)(y \rightarrow x)$

eelnev võrdus ongi kasutatav **ekvivalentsi** ühe võimaliku asendusseosena;

ülesanne:

Püüa tuletada **ekvivalentsi** jaoks veel üks *asendusseos*, teisendades edasi avaldist : $x \leftrightarrow y = (x \rightarrow y)(y \rightarrow x) = \ldots$

. . . . kasutades **implikatsiooni** eelpoolset *asendusseost* :

$x \rightarrow y = \bar{x} \vee y$ . . . . ja sulgude järgnevat lahtikorrutamist.

asendades mõlemad **implikatsioonid** tema *asendusseosega*

$$x \rightarrow y \; = \; \bar{x} \vee y$$

. . . saame teisendada :

$$x \leftrightarrow y \; = \; (x \rightarrow y)(y \rightarrow x) \; = \; (\bar{x} \vee y)(\bar{y} \vee x) \; =$$

$$= \; \bar{x}\bar{y} \vee y\bar{y} \vee \bar{x}x \vee yx \; =$$

$$= \; \bar{x}\bar{y} \vee 0 \vee 0 \vee yx \; = \; \bar{x}\bar{y} \vee xy$$

. . . seega oleks *ekvivalentsi* eelistatuim asendusseos (kohe DNK-kujule) :

$$x \leftrightarrow y \; = \; \bar{x}\bar{y} \vee xy$$

? . . . aga kuidas saaksime **ekvivalentsi asendusseose** tuletada *ekvivalentsi* tõeväärtustabelist ?

meenutuseks *ekvivalentsi* tõeväärtustabel :

	inversioon	konjunktsioon	disjunktsioon	implikatsioon	ekvivalents
x_1 x_2					$x_1 \leftrightarrow x_2$
0 0	1	0	0	1	1
0 1	1	0	1	1	0
1 0	0	0	1	0	0
1 1	0	1	1	1	1

meenutame eelnevalt vaadeldud 2-muutujaga **tõeväärtustabeleid** ja neile koostatud **avaldisi** , kus f_t oligi juhtumisi **ekvivalents** :

f_t jaoks eelmisel tunnil koostatud DNK ongi *ekvivalentsi asendusseos* :

$x_1 x_2$	f_e	f_t	f_k	f_n	f_v
0 0	0	1	1	1	1
0 1	0	0	0	0	1
1 0	1	0	1	1	1
1 1	0	1	1	0	1
	vastus: $\overline{x_1 \rightarrow x_2}$ $x_1 \bar{x}_2$	*vastus:* $x_1 \leftrightarrow x_2$ $\bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_1x_2$ $\overline{\bar{x}_1x_2 \vee x_1\bar{x}_2}$	*vastus:* $x_2 \rightarrow x_1$ $\overline{\bar{x}_1 x_2}$	*vastus:* $\bar{x}_2$ $\bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_1\bar{x}_2$	*vastus:* 1

loogikatehte **"summa mooduliga 2"** asendusseos : (*käsitleme edaspidi*)

$$x \oplus y \; = \; \bar{x}y \vee x\bar{y}$$

Loogikaavaldiste teisendamine

Loogikaavaldiste *teisendamine* on nende viimine muule samaväärsele (lihtsamale) kujule.

Loogikaavaldisi teisendatakse *loogikaalgebra põhiseoseid* ja *loogikatehete asendusseoseid* rakendades.

loogikaavaldiste teisendamisel kasutatavate <u>kõikide</u> reeglite KOKKUVÕTE

$$\bar{\bar{x}} = x$$

$$x \cdot 0 = 0 \qquad x \cdot 1 = x \qquad x \cdot \bar{x} = 0$$

$$x \vee 0 = x \qquad x \vee 1 = 1 \qquad x \vee \bar{x} = 1$$

$$x \cdot x = x \qquad x \vee x = x$$

$$\overline{x \vee y} = \bar{x}\,\bar{y} \qquad \overline{x\,y} = \bar{x} \vee \bar{y}$$

$$x \vee xy = x \qquad x \vee \bar{x}y = x \vee y$$

$$x(y \vee z) = xy \vee xz \qquad x \vee (yz) = (x \vee y)(x \vee z)$$

$x = xy \vee x\bar{y}$ $\quad$ $x = (x \vee y)(x \vee \bar{y})$

$x \to y = \bar{x} \vee y$ $\quad$ $x \leftrightarrow y = \bar{x}\bar{y} \vee xy$

$x \oplus y = \bar{x}y \vee x\bar{y}$

ülesanne:

Lihtsusta loogikaavaldised
(*loogikaalgebra põhiseoste* ja *asendusseoste* abil)

$\bar{x}_1 x_2 \vee \bar{x}_1 x_3 \vee x_2 = \ldots$

? . . . saaks teisendada : $\ldots = \bar{x}_1(x_2 \vee x_3) \vee x_2$

kuid see pole parim võimalus siin avaldises kuna leidub ka **neeldumine** :

$\bar{x}_1 x_2 \vee \bar{x}_1 x_3 \vee x_2 = \bar{x}_1 x_3 \vee x_2$

$(x_2 \to \bar{x}_1) x_2 \vee \bar{x}_2 = \ldots$

$\ldots = (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1) x_2 \vee \bar{x}_2 =$

$= \bar{x}_2 x_2 \vee \bar{x}_1 x_2 \vee \bar{x}_2 =$

$= \bar{x}_1 x_2 \vee \bar{x}_2 =$

$= \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2$

? . . . seda avaldist oleks saanud *neeldumise* abil lihtsustada ka teisiti, veidi lühemalt :

$\ldots = (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1) x_2 \vee \bar{x}_2 =$

$= (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1) \vee \bar{x}_2 =$

$= \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 =$

$= \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1$

$x_1(x_1 \leftrightarrow \bar{x}_2) \vee \bar{x}_2 = \ldots$

$\ldots = x_1(\bar{x}_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_2) \vee \bar{x}_2 =$

$= x_1 \bar{x}_1 x_2 \vee x_1 x_1 \bar{x}_2 \vee \bar{x}_2 =$

$= x_1 \bar{x}_2 \vee \bar{x}_2 =$

$= \bar{x}_2$

$\bar{x}_1 x_2 \vee x_1 x_2 \vee \bar{x}_2 = \ldots$

$\ldots = x_2(\bar{x}_1 \vee x_1) \vee \bar{x}_2 =$

$= x_2 \vee \bar{x}_2 =$

$= 1$

? . . . aga **neeldumisi** oleks kah saanud rakendada
(sulgude ette toomise asemel)
seljuhul oleks algne avaldis teisendunud :