Loogikafunktsiooni NUMBRILINE 10ndESITUS

10ndesitus on loogikafunktsiooni kompaktne esitusviis, kus tõeväärtustabel mahutatakse ära "*ühele reale*" (võttes appi **10nd**arvud)

Funktsiooni kolmest võimalikust *piirkonnast* :

0

1

määramatus seda tähistatakse tõeväärtustabelis *kriipsuga* : —

. . . . näidatakse **10nd**esituses ära tavaliselt **2 piirkonda** (kolmest)

3-muutuja funktsiooni 10ndesitus sisaldab 10ndarve **0** **7**
4-muutuja funktsiooni 10ndesitus sisaldab 10ndarve **0** **15**
5-muutuja funktsiooni 10ndesitus sisaldab 10ndarve **0** **31**

. . . . ehk üldiselt :

n-muutuja funktsiooni **10nd**esitus sisaldab 10ndarve **0** . . . . ($2^n - 1$)

ülesanne:

Leida **Karnaugh' kaardiga MDNK** ja **MKNK** (osaliselt määratud) 4-muutuja loogikafunktsioonile:

$$f(x_1 \dots x_4) = \prod (1,\ 4,\ 5,\ 9,\ 11,\ 12,\ 13,\ 15)_0 \quad (3,\ 14)_{—}$$

Tuvasta, kas leitud *normaalkujud* on **omavahel** loogiliselt **võrdsed** :

ehk kas **MDNK = MKNK ?**

. . . . kanname **10nd**esituse *4-muutuja Karnaugh' kaardile* :

$x_1x_2 \backslash x_3x_4$	00	01	11	10
00	0	1	3	2
01	4	5	7	6
11	12	13	15	14
10	8	9	11	10

. . . . selle funktsiooni **tõeväärtustabeli paiknemine** *4-muutuja kaardil* :

$x_1x_2 \backslash x_3x_4$	00	01	11	10
00	**1**	**0**	**—**	**1**
01	**0**	**0**	**1**	**1**
11	**0**	**0**	**0**	**—**
10	**1**	**0**	**0**	**1**

MDNK ja **MKNK** leidmised on t e i n e t e i s e s t s õ l t u m a t u d ja nad võib leida ükskõik kumbas järjekorras. MDNK leidmisel tehtud valikud / otsused ei mõjuta järgnevat MKNK leidmist (ja vastupidi) .

Leiame esimesena **MDNK**

! DNK saadakse alati loogikafunktsiooni **1de piirkonnast !**

ehk : kontuuridega tuleb kaardil katta **1**-de ruudud

Kontuuride valimise reeglid

1. Katame kaardil asuvad **1**de ruudud **suurimate** kontuuridega, kasutades seejuures **võimalikult vähe** kontuure.

(**0**-lle ei tohi valida **1**-de kontuuridesse)

2. *Määramatuse* ruute <u>tohib</u> seejuures kontuuridega katta, kuid <u>ei pea</u> katma.

Määramatusi katame kontuuridega ainult siis,
kui see aitab kasvatada veelgi suuremaks mõnda niikuinii vajalikku kontuuri.

3. **Kontuurid tohivad kattuda** — peavad olema suurimad võimalikud.

$x_1x_2 \backslash x_3x_4$	00	01	11	10
00	1	0	—	1
01	0	0	1	1
11	0	0	0	—
10	1	0	0	1

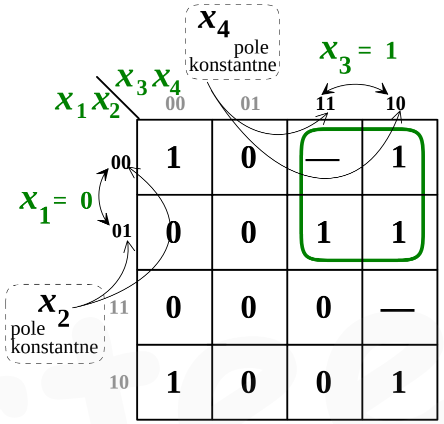
parim kontuuridevalik selle funktsiooni **1**-de piirkonna jaoks:

$x_1x_2 \backslash x_3x_4$	00	01	11	10
00	1	0	—	1
01	0	0	1	1
11	0	0	0	—
10	1	0	0	1

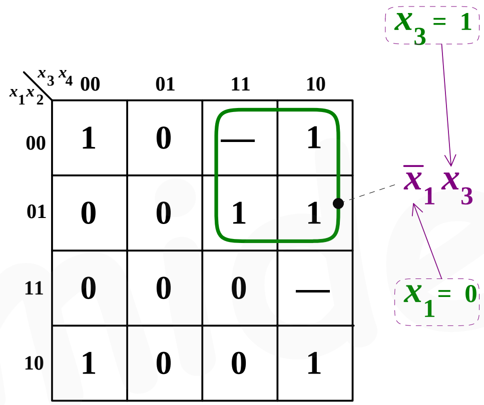
MDNK väljakirjutamiseks analüüsime ühekaupa igat valitud kontuuri — suvalises järjekorras, üks kontuur korraga

kontuuri analüüsimisel tuvastame:

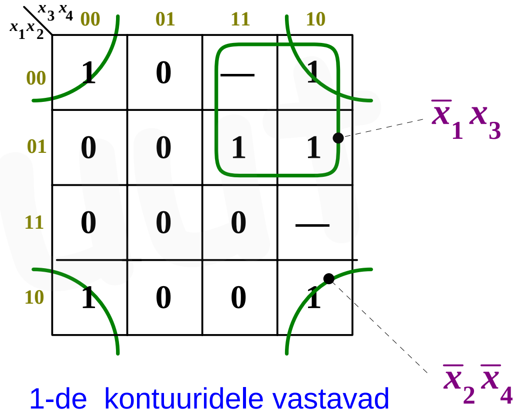
millised muutujad on **konstantsed selle kontuuri ulatuses** ?
ehk
millistes kaardi**piirkondades asub** see kontuur **tervikuna** ?



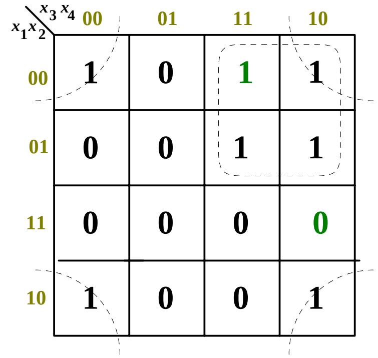
konstantsed muutujad
vaadeldavas kontuuris



1-de kontuurile vastav
elementaarkonjunktsioon



1-de kontuuridele vastavad
elementaarkonjunktsioonid



osaliselt määratud funktsiooni
MDNK-esituseks valitud
täielikult määratud funktsioon

kaardilt väljakirjutatud **MDNK** : $f(x_1 x_2 x_3 x_4) = \bar{x}_1 x_3 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_4$

Osaliselt määratud funktsioon on sellega "lõpuni määratud"

kontuuride äravalimine toob endaga koheselt kaasa ka senise *osaliselt määratud* loogikafunktsiooni lõpunimääramise *täielikult määratud* funktsiooniks (ehk *määramatuspiirkond* saab ärajaotatud **1**de ja **0**de piirkonna vahel).

... aga kui oleks valitud ***1****de katmiseks 4ruudulise asemel väiksem kontuur ? — ehk kui oleks valitud 2ruuduline kontuur ?*

x_1x_2 \ x_3x_4	00	01	11	10
00	1	0	—	1
01	0	0	$\boxed{1}$	$\boxed{1}$
11	0	0	0	—
10	1	0	0	1

ebaoptimaalsem kontuuridevalik 1de katmiseks

x_1x_2 \ x_3x_4	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	0	0	1	1
11	0	0	0	0
10	1	0	0	1

. . . selle kontuurivalikuga oleks esindajaks valitud selline **täielikult määratud funktsioon**

$f(x_1 x_2 x_3 x_4) = \bar{x}_1 x_3 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_4$ esimene elementaarkonjunktsioon tuleb seljuhul teistsugune : uuest kontuuridevalikust väljakirjutatud DNK :

$f(x_1 x_2 x_3 x_4) = \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_4$

väiksemas kontuuris on **rohkem** konstantseid muutujaid, mis põhjustab enamate liikmetega (ehk **keerukamat**) loogikaavaldist / normaalkuju.

. . . järelikult tasub valida SUURIMAD võimalikud kontuurid, misjuhul tuleb avaldisse VÄHIM arv algterme x_i ehk saame minimaalseima normaalkuju.

MDNK leitud ja analüüsitud — edasi leiame samale funtsioonile **MKNK** :

! KNK saadakse alati loogikafunktsiooni **0de piirkonnast !**

MKNK leidmisel teeme kõik samad toimingud, kuid **duaalselt vastupidi** : katame suurimate võimalike kontuuridega **0**-de piirkonna ehk **0**-de ruudud:

x_1x_2 \ x_3x_4	00	01	11	10
00	1	0	—	1
01	0	0	1	1
11	0	0	0	—
10	1	0	0	1

x_1x_2 \ x_3x_4	00	01	11	10
00	1	0	—	1
01	0	0	1	1
11	0	0	0	—
10	1	0	0	1

esimesena märgatav kontuuridevalik

$x_1x_2 \backslash x_3x_4$	00	01	11	10
00	1	0	—	1
01	0	0	1	1
11	0	0	0	—
10	1	0	0	1

teine võimalik / sobiv kontuuridevalik

$x_1x_2 \backslash x_3x_4$	00	01	11	10
00	1	0	—	1
01	0	0	1	1
11	0	0	0	—
10	1	0	0	1

kolmas võimalik / sobiv kontuuridevalik

ükski 3st sobivast kontuuridevalikust pole ülejäänud kahe suhtes parem / pole eelistatud , kuna kõik nad kasutavad **3** tk **4**-ruudulisi kontuure ehk kõik nad annavad **sama keerukusega KNK** (leidub 3 erinevat MKNK-d)

kirjutame MKNK välja esimesest (ehk kõige kergemini märgatavast) kontuuridevalikust:

$x_1x_2 \backslash x_3x_4$	00	01	11	10
00	1	0	—	1
01	0	0	1	1
11	0	0	0	—
10	1	0	0	1

esimesena märgatav kontuuridevalik

MKNK keerukus on soovikorral juba näha, sest *kontuurid* on juba valitud: kontuuride **arvust** ja nende **suurusest** tulenevalt oleme saamas sellise keerukusega MKNK-d : (**3** *elementaardisjunktsiooniga*, igas **2** *algtermi*) :

KNK on (tehete mõttes) **duaalselt vastupidine** normaalkuju **DNK** suhtes :

DNK : $\bar{x}_1 x_3 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_4$

$$f(x_1 x_2 x_3 x_4) = (x \vee x)(x \vee x)(x \vee x)$$

! *tüüpiline viga:*

KNK jaoks (ehk **0**-de kontuuridest) ei tekki *inversioonid* samamoodi nagu DNK jaoks (ehk nagu **1**-de kontuuridest);

KNK jaoks tekkivad *inversioonid* **duaalselt vastupidi** (DNK ehk **1**-de kontuuride suhtes) :

nullide kontuuris konstantne väärtus **1** annab **inversioonis** algtermi ;
nullide kontuuris konstantne väärtus **0** annab **otseväärtuses** algtermi ;

$x_1x_2 \backslash x_3x_4$	00	01	11	10
00	1	0	—	1
01	0	0	1	1
11	0	0	0	—
10	1	0	0	1

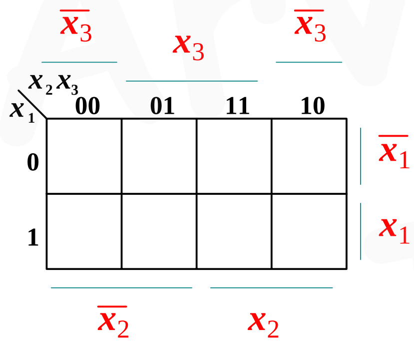
lahendiks valitud MKNK kontuuridekomplekt

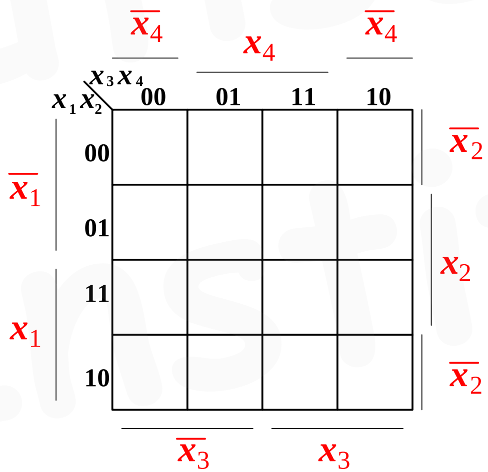
$$f(x_1 x_2 x_3 x_4) = (\bar{x}_2 \vee x_3)(x \quad \vee \quad x)(x \quad \vee \quad x)$$

MKNK:

$$f(x_1 x_2 x_3 x_4) = (\bar{x}_2 \vee x_3)(x_3 \vee \bar{x}_4)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_4)$$

pane tähele :





piirkondade tähised on (algtermidena) õiged ainult **DNK jaoks !**

Et saadud *normaalkujudele* saaks viidata, tähistame leitud MDNK ja MKNK :

$$f_K = (\bar{x}_2 \vee x_3)(x_3 \vee \bar{x}_4)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_4)$$

$$f_D = \bar{x}_1 x_3 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_4$$

vaatleme, milleks arvutuvad leitud normaalkujud *määramatuspiirkonnas.*

milleks arvutub leitud **MDNK**

funktsiooni **määramatuspiirkonnas** : { 0011 1110 } **?**

$f_D(0011) = ?$

$f_D(1110) = ?$

$$f_D(x_1 x_2 x_3 x_4) = \bar{x}_1 x_3 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_4$$

$x_1x_2 \backslash x_3x_4$	00	01	11	10
00	1	0	—	1
01	0	0	1	1
11	0	0	0	—
10	1	0	0	1

$f_D(0011) = 1$

$f_D(1110) = 0$

$f_K = (\bar{x}_2 \vee x_3)(x_3 \vee \bar{x}_4)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_4)$

milleks arvutub leitud MKNK

funktsiooni **määramatuspiirkonnas** : { 0011 1110 } ?

$f_K(0011) = ?$

$f_K(1110) = ?$

$$f_K(x_1 x_2 x_3 x_4) = (\bar{x}_2 \vee x_3)(x_3 \vee \bar{x}_4)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_4)$$

x_1x_2 \ x_3x_4	00	01	11	10
00	1	0	—	1
01	0	0	1	1
11	0	0	0	—
10	1	0	0	1

MKNK leidmise kontuuridevalik

$f_K(0011) = 1$

$f_K(1110) = 1$

kas leitud MDNK ja MKNK on teineteisega loogiliselt võrdsed ?

$f_D = f_K$?

meenutame:

loogikaavaldised on **võrdsed** kui nende tõeväärtustabelid on samasugused.

Osaliselt määratud funktsiooni esindajateks valitud MDNK ja MKNK **võrdsus** oleneb sellest, milleks nad arvutuvad *määramatuspiirkonnas*.

Siin leitud mõlemad normaalkujud f_D f_K **ei ole** teineteisega võrdsed:

$f_D \neq f_K$ sest

$f_D(1110) \neq f_K(1110)$ kuid

$f_D(0011) = f_K(0011)$

tõeväärtustabelite **eelviimane** rida on neil erinev :

$f_D(1110) = 0$

$f_K(1110) = 1$

. . . järgnev tõeväärtustabel e i o l e lahenduse osa — ainult illustratsioon :

$x_1 x_2 x_3 x_4$	f_D	f_K
0 0 0 0	1	1
0 0 0 1	0	0
0 0 1 0	1	1
0 0 1 1	1	1
0 1 0 0	0	0
0 1 0 1	0	0
0 1 1 0	1	1
0 1 1 1	1	1
1 0 0 0	1	1
1 0 0 1	0	0
1 0 1 0	1	1
1 0 1 1	0	0
1 1 0 0	0	0
1 1 0 1	0	0
1 1 1 0	0	1
1 1 1 1	0	0

x_1x_2 \ x_3x_4	00	01	11	10
00	1	0	—	1
01	0	0	1	1
11	0	0	0	—
10	1	0	0	1

0011 korral väärtustuvad MDNK ja MKNK samamoodi (1)

1110 korral väärtustuvad MDNK ja MKNK erinevalt

0-de ja 1-de kontuurid samal kaardil

sellel funktsioonil on täpselt **1** MDNK kuid **3** erinevat MKNK-d

kui oleksime valinud lahendiks mõne teise **MKNK** — kas seljuhul oleks leidunud ka selline MKNK, mis juhtumisi on võrdne sama funktsiooni MDNK-ga **?** (MDNK = MKNK ?)

vaatame kõigi nelja funktsiooni (1 + 3) **tõeväärtustabeleid** kaartidel :

x_1x_2 \ x_3x_4	00	01	11	10
00	1	0	1	1
01	0	0	1	1
11	0	0	0	0
10	1	0	0	1

MDNK jaoks parim "esindaja" :
täielikult määratud loogikafunktsioon

x_1x_2 \ x_3x_4	00	01	11	10
00	1	0	1	1
01	0	0	1	1
11	0	0	0	1
10	1	0	0	1

MKNK jaoks meievalitud esindaja :
täielikult määratud loogikafunktsioon

x_1x_2 \ x_3x_4	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	0	0	1	1
11	0	0	0	1
10	1	0	0	1

MKNK jaoks **teine** võimalik esindaja :
täielikult määratud loogikafunktsioon

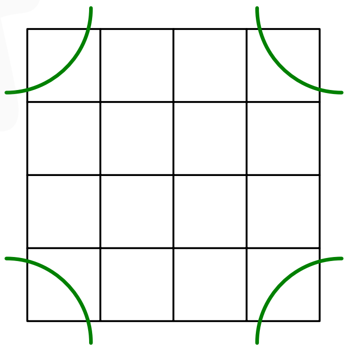
x_1x_2 \ x_3x_4	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	0	0	1	1
11	0	0	0	0
10	1	0	0	1

MKNK jaoks **kolmas** esindaja:
täielikult määratud loogikafunktsioon

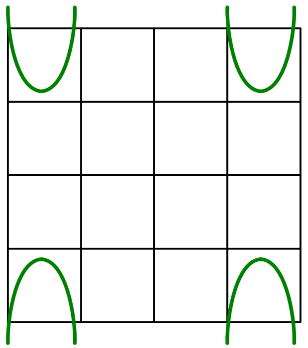
ilmneb, et selle funktsiooni ükski **MKNK** ei ole juhtumisi võrdne **MDNK**-ga
see pole probleem — nad ei peagi olema võrdsed; (*küsisime uudishimust...*)

ka kodutöös on vaja äratunda leitud MDNK ja MKNK avaldiste omavahelist **võrdsust** / mittevõrdsust **!**

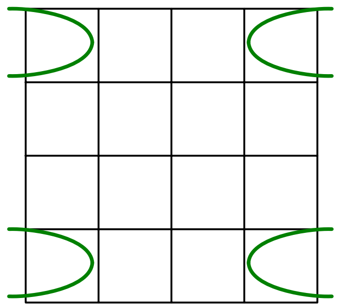
pane tähele :



see 2 x 2 kontuur on tekkinud . . . .



VÕI



. . . . nende kontuuride kokkuliitmisel . . . . nende kontuuride kokkuliitmisel

ülesanne:

Leia **Karnaugh' kaardi** abil MDNK samale funktsioonile, mille TDNK lihtsustasime eelpool näites MDNK-ks

$x_1\, x_2\, x_3$	$f\,(x_1\, x_2\, x_3)$
0 0 0	1
0 0 1	0
0 1 0	1
0 1 1	1
1 0 0	0
1 0 1	1
1 1 0	1
1 1 1	1

kanname tõeväärtustabeli 3-muutuja kaardile:

$x_1 \backslash x_2 x_3$	00	01	11	10
0				
1				

$x_1 \backslash x_2 x_3$	00	01	11	10
0	1	0	1	1
1	0	1	1	1

$x_1 \backslash x_2 x_3$	00	01	11	10
0	1	0	1	1
1	0	1	1	1

MDNK :

$$f\,(x_1 x_2 x_3) \;=\; x_2 \;\vee\; x_1 x_3 \;\vee\; \overline{x}_1 \overline{x}_3$$

MDNK-ks saime siin sama tulemuse nagu enne TDNK teisendamisel:

. . . . meenutame selle funktsiooni TDNK varasema teisenduse lõppu :

$$. \; . \; . \;=\; \overline{x}_1 \overline{x}_3 \;\vee\; x_2\,(\,\overline{x}_1 \;\vee\; x_1\,) \;\vee\; x_1 x_3 \;=$$

$$=\; \overline{x}_1 \overline{x}_3 \;\vee\; x_2 \;\vee\; x_1 x_3$$

? . . . . *kas Karnaugh' kaardilt väljakirjutatud DNK-avaldist võib vahel olla võimalik lihtsustada käsitsi edasi veelgi lihtsamaks (loogikaalgebra põhiseoste abil) ?*

(*märgime* : praegu kaardilt saadud DNK-d : $x_2 \;\vee\; x_1 x_3 \;\vee\; \overline{x}_1 \overline{x}_3$ **ei ole võimalik** "käsitsi" edasi lihtsustada)

.

ainult seljuhul saab avaldist edasi lihtsustada :

vaatame milline oleks olnud kaardilt loetav DNK-avaldis, kui oleksime ühe kontuuri valinud **väiksema** ?

$x_1 \backslash x_2x_3$	00	01	11	10
0	$\boxed{1}$	0	1	1
1	0	1	1	1

. . . . siit kaardilt väljakirjutatud DNK :

$$f(x_1 x_2 x_3) = x_2 \vee x_1 x_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$$

sellises avaldises leidub **neeldumine** $x \vee \bar{x}\,y = x \vee y$

mis ikkagi kaotab liiase $\bar{x}_2$

ülesanne:

Leida **Karnaugh' kaardiga** MDNK MKNK 5-muutuja funktsioonile:

$$f(x_1 \dots x_5) = \sum(0,2,6,7,8,10,24,30)_1 \quad (3,14,16,18,26)_-$$

kanname tõeväärtustabeli 5-muutuja kaardile:

$x_2x_3 \backslash x_4x_5$	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

$x_1 = 0$

$x_2x_3 \backslash x_4x_5$	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

$x_1 = 1$

$x_1 = 0$

$x_1 = 1$

$x_2x_3 \backslash x_4x_5$	00	01	11	10
00	1	0	—	1
01	0	0	1	1
11	0	0	0	—
10	1	0	0	1

$x_1 = 0$

$x_2x_3 \backslash x_4x_5$	00	01	11	10
00	—	0	0	—
01	0	0	0	0
11	0	0	0	1
10	1	0	0	—

$x_1 = 1$

$x_1 = 0$

$x_1 = 1$

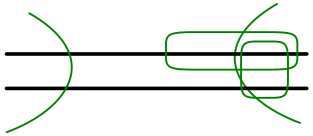
MDNK :

$x_2x_3 \backslash x_4x_5$	00	01	11	10
00	1		—	1
01			1	1
11				—
10	1			1

$x_1 = 0$

$x_2x_3 \backslash x_4x_5$	00	01	11	10
00	—			—
01				
11				1
10	1			—

$x_1 = 1$



MDNK :

$$f(x_1 \ldots . x_5) = \bar{x}_3\bar{x}_5 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 x_4 \vee x_2 x_4 \bar{x}_5$$

see on ainus MDNK sellel (osaliselt määratud) funktsioonil.

kogu *määramatuspiirkond* tasus võtta **1**-de piirkonnaks

MKNK :

$x_2x_3 \backslash x_4x_5$	00	01	11	10
00		0	—	
01	0	0		
11	0	0	0	—
10		0	0	

$x_1 = 0$

$x_2x_3 \backslash x_4x_5$	00	01	11	10
00	—	0	0	—
01	0	0	0	0
11	0	0	0	
10		0	0	—

$x_1 = 1$

$x_1 = 0$
$x_1 = 1$

$x_2x_3 \backslash x_4x_5$	00	01	11	10
00		0	—	
01	0	0		
11	0	0	0	—
10		0	0	

$x_2x_3 \backslash x_4x_5$	00	01	11	10
00	—	0	0	—
01	0	0	0	0
11	0	0	0	
10		0	0	—

?

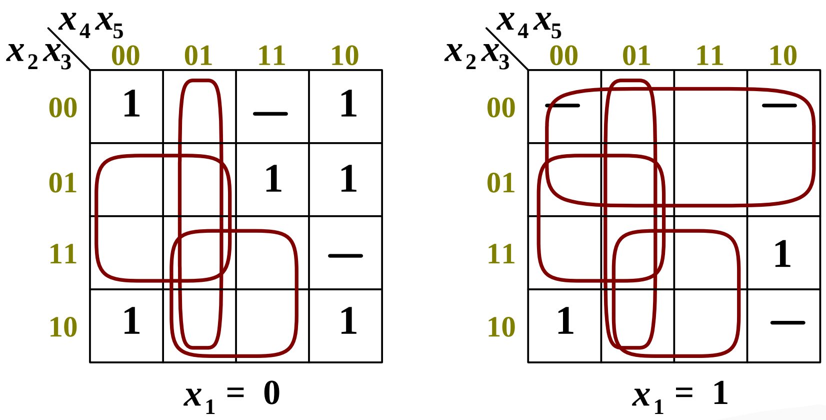
$x_2x_3 \backslash x_4x_5$	00	01	11	10
00		0	—	
01	0	0		
11	0	0	0	—
10		0	0	

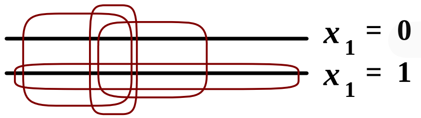
$x_1 = 0$

$x_2x_3 \backslash x_4x_5$	00	01	11	10
00	—	0	0	—
01	0	0	0	0
11	0	0	0	
10		0	0	—

$x_1 = 1$

$x_1 = 0$
$x_1 = 1$



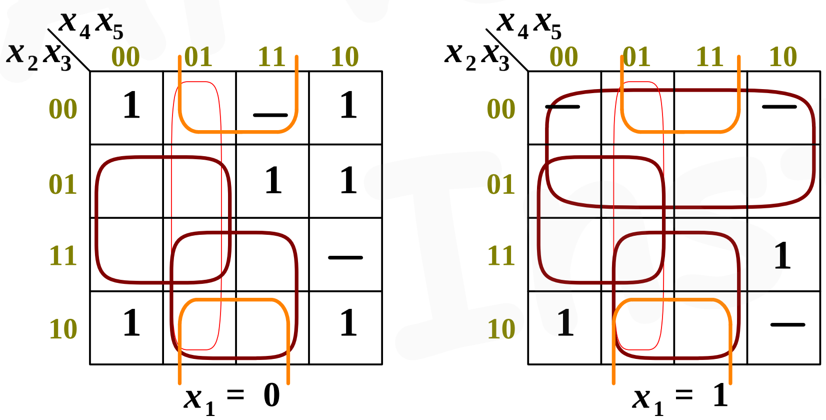


MKNK :

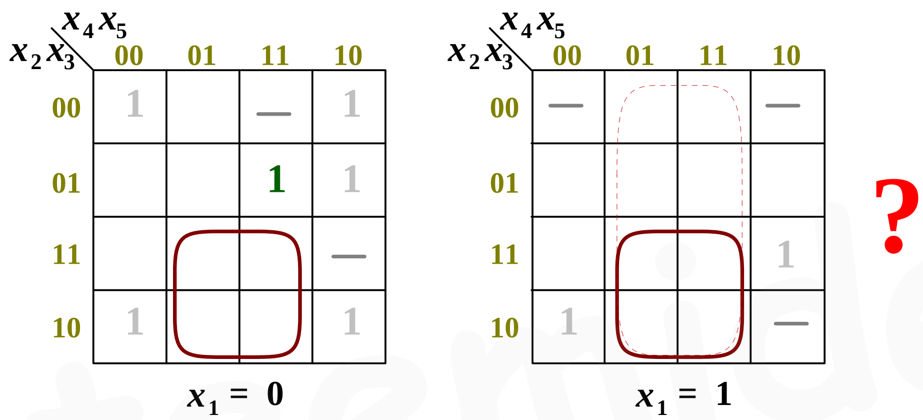
$$f(x_1 \ldots x_5) \;=\; (\qquad\qquad)(\qquad\qquad)(\qquad\qquad)(\qquad\qquad)$$

$$f(x_1 \ldots x_5) \;=\; (\bar{x}_3 \vee x_4)(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_5)(x_4 \vee \bar{x}_5)(\bar{x}_1 \vee x_2)$$

siin leidub ka teine, sama keerukusega MKNK (seega on **2 lahendit**)
ruut **00001** on kaetav ka muu 8-ruudulise ehk samasuure kontuuriga :



miks ei saa parempoolsel "kaardikorrusel" seda uut oranzi kontuuri suurendada 8-ruuduliseks ? (praegu on ta seal ju 4-ruuduline ja keskel ruutudes pole seal **1**-sid segamas ?)



pane tähele :
samal põhjusel ei saa "parempoolse tabeli kontuur" kasvada suuremaks

ülesanne:

Kontrollida **Karnaugh' kaardiga** ühe varasema teisendusülesande tulemuseks saadud DNK-avaldise **minimaalsust**:

$$f(x_1 \ldots x_4) \;=\; x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_4 \;\vee\; x_1 \bar{x}_2 x_3 \;\vee\; x_3 x_4 \;\vee\; x_2 x_4 \;\vee\; \bar{x}_1 x_4$$

Kas see DNK on **MDNK** ?

tegutseme "tagurpidi" senise suhtes :
kanname 4-muutuja kaardile need **1**-de kontuurid, millest tuleneks antud DNK

$$x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_4 \;\lor\; x_1 \bar{x}_2 x_3 \;\lor\; x_3 x_4 \;\lor\; x_2 x_4 \;\lor\; \bar{x}_1 x_4$$

$x_1x_2 \backslash x_3x_4$	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

elementaarkonjunktsioon $x_1\bar{x}_2\bar{x}_4$ tuleneb **1**-de intervallist **1 0 — 0**
elementaarkonjunktsioon $x_1\bar{x}_2x_3$ tuleneb **1**-de intervallist **1 0 1 —**
elementaarkonjunktsioon x_3x_4 tuleneb **1**-de intervallist **— — 1 1**
elementaarkonjunktsioon x_2x_4 tuleneb **1**-de intervallist **— 1 — 1**
elementaarkonjunktsioon $\bar{x}_1x_4$ tuleneb **1**-de intervallist **0 — — 1**

$x_1x_2 \backslash x_3x_4$	00	01	11	10
00		1	1	
01		1	1	
11		1	1	
10	1		1	1

analüüsitava DNK tõeväärtustabel kaardil

? . . . mitme kontuuriga õnnestub siin katta kõik **1**-de ruudud optimaalseimal viisil (kui oleks eesmärgiks **MDNK**) ?

$x_1x_2 \backslash x_3x_4$	00	01	11	10
00		1	1	
01		1	1	
11		1	1	
10	1		1	1

algse DNK liikmetele vastavad **5 kontuuri**

liiane kontuur vastab DNK liikmele $x_1\bar{x}_2x_3$:

$$x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_4 \;\lor\; x_1 \bar{x}_2 x_3 \;\lor\; x_3 x_4 \;\lor\; x_2 x_4 \;\lor\; \bar{x}_1 x_4$$

Selle liikme ärajätmisel DNK-st jääb avaldise tõeväärtustabel muutumatuks.

Analüüsitava DNK-avaldise **MDNK** on seega:

$$x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_4 \;\lor\; x_3 x_4 \;\lor\; x_2 x_4 \;\lor\; \bar{x}_1 x_4$$

mis põhjustab punase kontuuri liiasust ?

x_1x_2 \ x_3x_4	00	01	11	10
00		1	1	
01		1	1	
11		1	1	
10	1		1	1

liigne kontuur on kaetud 2 muu kontuuri poolt

Kaardi kontuuridest on näha, et liiasus sisaldub juba liiase avaldise **kolmes esimeses liikmes** :

$$x_1\bar{x}_2\bar{x}_4 \vee x_1\bar{x}_2x_3 \vee x_3x_4 \vee x_2x_4 \vee \bar{x}_1x_4$$

neljas liige x_2x_4 ja *viies* liige $\bar{x}_1x_4$ **ei põhjusta** *teise* liikme liiasust

$$x_1\bar{x}_2\bar{x}_4 \vee x_1\bar{x}_2x_3 \vee x_3x_4 = x_1\bar{x}_2\bar{x}_4 \vee x_3x_4$$

kas leidub ka avaldise **teisendus**, mis kaotaks liiase liikme ?

JAH LEIDUB selline teisendus !

(. . . . ja osad õpilased vajavad seda ka oma kodutöös !) :

rakendades *kleepimisseadust* $x = xy \vee x\bar{y}$ teisendame avaldise korraks keerulisemaks,

lisades liiasele liikmele mõne seal puuduva muutuja — siin: x_4

$$x_1\bar{x}_2\bar{x}_4 \vee x_1\bar{x}_2x_3 \vee x_3x_4 =$$

$$= x_1\bar{x}_2\bar{x}_4 \vee x_1\bar{x}_2x_3x_4 \vee x_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4 \vee x_3x_4 = \ldots.$$

. . . . nüüd on tekkinud avaldises *neeldumised* kujul $x \vee xy = x$

värvidega on järgnevas rõhutatud avaldiseliikmed neeldumisseaduse suhtes:

$$\ldots. = x_1\bar{x}_2\bar{x}_4 \vee x_1\bar{x}_2x_3x_4 \vee x_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4 \vee x_3x_4 =$$

$$= x_1\bar{x}_2\bar{x}_4 \vee x_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4 \vee x_3x_4 =$$

$$= x_1\bar{x}_2\bar{x}_4 \vee x_3x_4$$

kleepimisjärgselt toimus kaks **neeldumist** vastavalt *neeldumisseadusele*

Kuna saime praegu ka teisenduse teel :

$$x_1\bar{x}_2\bar{x}_4 \vee x_1\bar{x}_2x_3 \vee x_3x_4 = x_1\bar{x}_2\bar{x}_4 \vee x_3x_4$$

. . . . siis on selgunud nii kaardi abil kui ka teisendusel, et kehtib võrdus :

$$x_1\bar{x}_2\bar{x}_4 \vee x_1\bar{x}_2x_3 \vee x_3x_4 \vee x_2x_4 \vee \bar{x}_1x_4 =$$

$$= x_1\bar{x}_2\bar{x}_4 \vee x_3x_4 \vee x_2x_4 \vee \bar{x}_1x_4$$

(*l a h e n d a t u d + analüüsitud*)

sama võib esineda kodutöö ülesandes, kus MKNK sulud korrutatakse lahti :

ka kodutöös võib osutuda selline kleepimine vajalikuks, kui

MDNK = MKNK , *kuid* **MKNK** *lahtikorrutamisel ei tekki* **MDNK**

kodutöös:

kui **MDNK = MKNK** siis ( )( )( ) = ... = **MDNK**

kui **MDNK ≠ MKNK** siis ( )( )( ) = ... = DNK

ülesanne:

Kontrollida eelmise tunni ühe ülesande teisendustulemuseks olnud TDNK-avaldise

$x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \;=\; \bar{x}_1\bar{x}_2 x_3 \;\vee\; \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \;\vee\; x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \;\vee\; x_1 x_2 x_3$

. . . minimaalsust **Karnaugh' kaardi** abil.

meenutame :
seda TDNK-avaldist ei õnnestunud **käsitsi** enam edasi lihtsustada

selle DNK **minimaalsuse** kontrollimiseks saame kasutada *tõeväärtustabelit* mille varem arvutasime etteantud avaldisele $x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$:
(või arvutame tema *tõeväärtustabeli* uuesti :)

$x_1\ x_2\ x_3$	$x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$	TDNK liikmed
0 0 0	0	
0 0 1	**1**	$\bar{x}_1\bar{x}_2 x_3$
0 1 0	**1**	$\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3$
0 1 1	0	
1 0 0	**1**	$x_1\bar{x}_2\bar{x}_3$
1 0 1	0	
1 1 0	0	
1 1 1	**1**	$x_1 x_2 x_3$

MDNK väljakirjutamiseks kanname selle tõeväärtustabeli
3-muutuja *Karnaugh' kaardile* :

$x_1 \backslash x_2x_3$	00	01	11	10
0				
1				

f :

$x_1 \backslash x_2x_3$	00	01	11	10
0	0	1	0	1
1	1	0	1	0

ilmneb, et selle funktsiooni **TDNK** on samas ka **MDNK** kuna ta ei lihtsustu :
1-de paigutus on väga ebasoodne: valida õnnestub ainult <u>üheruudulisi</u> kontuure :

f :

$x_1 \backslash x_2x_3$	00	01	11	10
0	0	$\boxed{1}$	0	$\boxed{1}$
1	$\boxed{1}$	0	$\boxed{1}$	0

avaldise $x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$ **MDNK** kui ka **TDNK** on sama avaldis :

$$f(x_1x_2x_3) \;=\; \bar{x}_1\bar{x}_2 x_3 \;\vee\; \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \;\vee\; x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \;\vee\; x_1 x_2 x_3$$

ülesanne:

Meenutame varasemat ülesannet :
Leia järgnevast **2nd**vektorite hulgast :

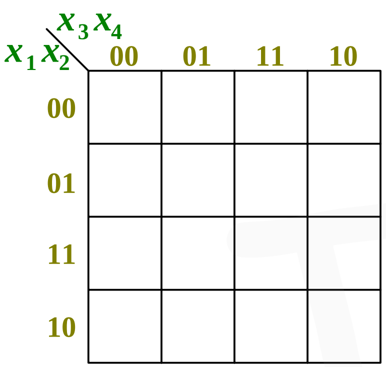
{ 0001 0110 0011 1001 1101 1011 }

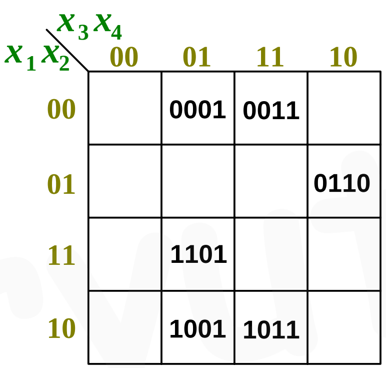
— kõik **kahe** vektoriga *intervallid* (mis leiduvad selles hulgas) ;
— kõik **nelja** vektoriga *intervallid* (mis leiduvad selles hulgas) ;

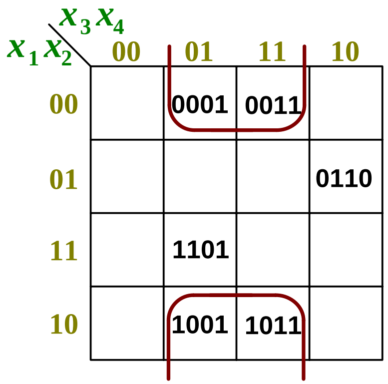
Nüüd leiame küsitud *intervallid* **Karnaugh' kaardi** abil !

{ 0001 0110 0011 1001 1101 1011 }

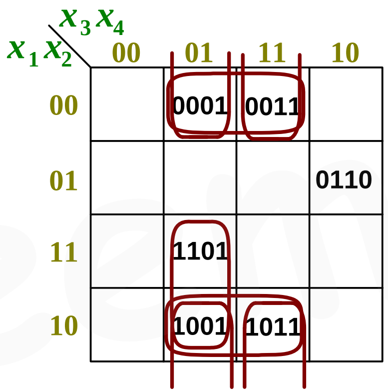
. . . tuvastame nende vektorite asukohad (ruudud) 4-muutuja kaardil :







neljane intervall : 1 tk



kahesed intervallid : 5 tk

Kaardilt saab kohe välja kirjutada needsamad *intervallid* , mis varem leidsime vektorite võrdleval analüüsimisel :

ainus *neljane intervall* on : **— 0 — 1**

kaheseid intervalle paistab siin 5 tk :

{ **0001 0011** } = **0 0 — 1**

{ **0001 1001** } = **— 0 0 1**

{ **0011 1011** } = **— 0 1 1**

{ **1001 1101** } = **1 — 0 1**

{ **1001 1011** } = **1 0 — 1**

ülesanne:

Leida **Karnaugh' kaardiga** MDNK 6-muutuja funktsioonile:

$$f(x_1 \dots x_6) =$$

$$= \sum(0, 1, 16, 17, 46, 48, 49, 58, 59, 62, 63)_1 \quad (32, 33, 36, 39, 44)_-$$

kanname tõeväärtustabeli 6-muutuja kaardile:

$x_3x_4 \backslash x_5x_6$	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

x_1x_2 = 00

$x_3x_4 \backslash x_5x_6$	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

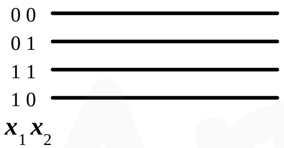
x_1x_2 = 01

$x_3x_4 \backslash x_5x_6$	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

x_1x_2 = 11

$x_3x_4 \backslash x_5x_6$	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

x_1x_2 = 10



$x_3x_4 \backslash x_5x_6$	00	01	11	10
00	1	1		
01				
11				
10				

x_1x_2 = 00

$x_3x_4 \backslash x_5x_6$	00	01	11	10
00	1	1		
01				
11				
10				

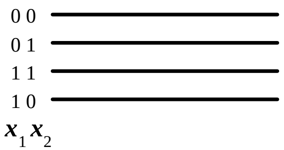
x_1x_2 = 01

$x_3x_4 \backslash x_5x_6$	00	01	11	10
00	1	1		
01				
11			1	1
10			1	1

x_1x_2 = 11

$x_3x_4 \backslash x_5x_6$	00	01	11	10
00	—	—		
01	—		—	
11	—			1
10				

x_1x_2 = 10



$x_3x_4 \backslash x_5x_6$	00	01	11	10
00	1	1		
01				
11				
10				

x_1x_2 = 00

$x_3x_4 \backslash x_5x_6$	00	01	11	10
00	1	1		
01				
11				
10				

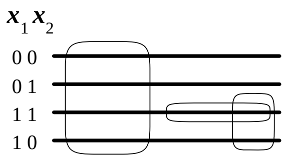
x_1x_2 = 01

$x_3x_4 \backslash x_5x_6$	00	01	11	10
00	1	1		
01				
11			1	1
10			1	1

x_1x_2 = 11

$x_3x_4 \backslash x_5x_6$	00	01	11	10
00	—	—		
01	—		—	
11	—			1
10				

x_1x_2 = 10



MDNK :

$$f(x_1 \dots x_6) = \bar{x}_3\bar{x}_4\bar{x}_5 \lor x_1x_2x_3x_5 \lor x_1x_3x_4x_5\bar{x}_6$$

ülesanne:

Leida *Karnaugh' kaardi* abil **MDNK** **MKNK**
DNK-avaldisena esitatud 4-muutuja funktsioonile :

$$f(x_1x_2x_3x_4) =$$

$$= x_1x_2\bar{x}_3 \lor x_1x_2\bar{x}_3x_4 \lor x_1\bar{x}_2x_4 \lor x_3x_4 \lor x_1\bar{x}_3\bar{x}_4$$

$$x_1x_2\bar{x}_3 \lor x_1x_2\bar{x}_3x_4 \lor x_1\bar{x}_2x_4 \lor x_3x_4 \lor x_1\bar{x}_3\bar{x}_4$$

$x_1x_2 \backslash x_3x_4$	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

$$f = x_1\bar{x}_3 \vee x_3x_4$$

iseseisev vabatahtlik kodune lahendamine:

rohelise õpiku (2012) lk. **231** viimane ül. lk. **232** esimene ül. :

$f = \sum(3, 4, 7, 12, 14)_1 \ (0, 5, 6, 8, 15)_{-}$ leida **MDNK** ja **MKNK**

$f = \sum(0, 1, 4, 9, 25, 28)_1 \ (5, 13)_{-}$ leida **MDNK** ja **MKNK**

ülesanne:

Leida **TDNK** **TKNK** **MKNK** 3-muutuja funktsioonile:

$$f(x_1 x_2 x_3) = \bar{x}_1 \vee x_2 x_3$$

. . . . miks siin ei küsita **MDNK** leidmist ?

mitu võimalust leida TDNK :

1. *kleepimise* (korduv) rakendamine mittetäielikule DNK-le ;

TDNK saamiseks võib lisada elementaarkonjunktsioonidele nendes puuduvad muutujad *kleepimisseaduse* korduva rakendamisega:

$$x = x\bar{y} \vee xy$$

$$\bar{x}_1 \vee x_2x_3 = \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1x_2 \vee x_2x_3 =$$

$$= \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2x_3 \vee x_1x_2x_3 =$$

$$= \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_2x_3 \vee x_1x_2x_3$$

. . . . l a h e n d a t u d : TDNK leitud

. . . . kas oleks saanud lisada samal kleepimissammul ühe asemel korraga **2** muutujat — ehk mõlemad puuduolevad : x_2 ja x_3 korraga ? (. . . misjuhul lisanduks korraga korrutis x_2x_3 ?)

ON VÕIMALIK , kuid mitte nii :

! *viga:*

$$\bar{x}_1 \neq \bar{x}_1x_2x_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$$

$$x = xy \vee x\bar{y}$$

õige teisenduskäik JUHUL KUI soovitakse kleepida "2 muutujat korraga" :

$$\bar{x}_1 \vee x_2 x_3 = \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee \bar{x}_1 \overline{x_2 x_3} \vee$$

$$\vee\ x_1 x_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 = \ . \ . \ .$$

$$= \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee \bar{x}_1 (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) \vee x_1 x_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 =$$

$$= \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_3 \vee x_1 x_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 =$$

$$= \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee$$

$$\vee\ \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_1 x_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 =$$

$$= \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 x_2 x_3$$

saime sama TDNK — kuid "kaks muutujat korraga"*-juurdekleepimisel osutus kogu teisendus TDNK-ni mahukamaks kui* "üks muutuja korraga"*-juurdekleepimisel*

MKNK :

mitu võimalust leida MKNK :

1. minna üle *Karnaugh' kaardi* abil selle funktsiooni **0**-de piirkonnale ;

2. mõtteliste sulgude (korduv) *lahtiliitmine* DNK-s viib avaldise samuti KNK-ks; (kuid mitte alati MKNK-ks)

1. **MKNK** leidmiseks tasub Karnaugh' kaardi abil tuvastada selle funktsiooni **nullide piirkond**.

Selleks taastame (algsest MDNK-st) 3-muutuja kaardile esmalt **ühed** :

$$\bar{x}_1 \vee x_2 x_3$$

f :

$x_1 \backslash x_2 x_3$	00	01	11	10
0				
1				

. . . **1**-sid oli vaja selleks, tegelikult saada nendekaudu teada hoopis **0-llid** :

f :

$x_1 \backslash x_2 x_3$	00	01	11	10
0	1	1	1	1
1	0	0	1	0

f :

$x_1 \backslash x_2 x_3$	00	01	11	10
0	1	1	1	1
1	0	0	1	0

MKNK :

$$f = (\bar{x}_1 \vee x_2)(\bar{x}_1 \vee x_3)$$

. . . . l a h e n d a t u d :   MKNK leitud

2. mõtteliste sulgude *lahtiliitmine* , kasutades põhiseost :

$$x \vee (yz) = (x \vee y)(x \vee z)$$

$$\bar{x}_1 \vee x_2 x_3 = \bar{x}_1 \vee (x_2 x_3) = (\bar{x}_1 \vee x_2)(\bar{x}_1 \vee x_3)$$

TKNK ?

TKNK võimalik leida mitmel viisil:

1. lisame MKNK liikmetele puuduvad algtermid *kleepimisseadusega* :

$$x = (x \vee y)(x \vee \bar{y})$$

kleebime MKNK liikmetele *algterme* juurde :

$$f = (\bar{x}_1 \vee x_2)(\bar{x}_1 \vee x_3) =$$

$$= (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)$$

$$(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)$$

. . . . jättes korduva KNK-liikme ära :

TKNK :

$$f = (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)$$

. . . . l a h e n d a t u d : TKNK leitud

2. teine võimalus TDNK või TKNK väljakirjutamiseks :

TKNK : "üheruudulised kontuurid" *Karnaugh' kaardil* **0**-e katmas ;

TDNK : "üheruudulised kontuurid" *Karnaugh' kaardil* **1**-sid katmas ;

kui on juba olemas selle funktsiooni tõeväärtustabel *Karnaugh' kaardil* ,
siis moodustame mõttelised üheruudulised kontuurid **0**-e katma :

f :

$x_1 \backslash x_2x_3$	00	01	11	10
0	1	1	1	1
1	0 (100)	0 (101)	1	0 (110)

TKNK saamisvõimalus

ü h e r u u d u l i s e kontuuri ulatuses on konstantsed **kõik** muutujad **!**
(. . . . mis on selle ruudu 2ndkood ehk **argumentvektor**)

suurimatest kontuuridest saame **minimaalse** normaalkuju ;
väikseimatest (ehk 1-ruudulistest) kontuuridest saame **täieliku** normaalkuju;

$$f = (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)$$

0de piirkonna üksikutest ruutudest TKNK liikmete väljakirjutamine on sama nagu tõeväärtustabeli **0**de piirkonna üksikutest ridadest TKNK väljakirjutamine : iga ruut annab avaldisse **kõik** muutujad: saame TKNK
Kaardil võib ettekujutada väikseimaid ehk **1**-ruudulisi kontuure, misjuhul iga selline 1-ruudune *kontuur* annaks TKNK ühe liikme.

. . . . no ja varemleitud **TDNK** oleks kah olnud võimalik saada kaardilt, nn. *üheruudulistest kontuuridest* mis katavad kõik **1**-d :

$$\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1 x_2 x_3$$

f :

$x_1 \backslash x_2x_3$	00	01	11	10
0	1	1	1	1
1	0 (100)	0 (101)	1	0 (110)

TKNK saamisvõimalus

f :

$x_1 \backslash x_2x_3$	00	01	11	10
0	1 (000)	1 (001)	1 (011)	1 (010)
1	0	0	1 (111)	0

TDNK saamisvõimalus