KARNAUGH' KAARDID

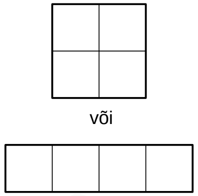
Karnaugh' kaart on funktsiooni *tõeväärtustabeli* sihipärane topoloogiline ü m b e r p a i g u t u s tasandil või ruumis.

Tõeväärtustabeli igale reale (ehk funktsiooni igale **argumentvektorile**) vastab kaardil **üks ruut**.

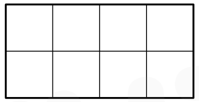
Maurice Karnaugh

Karnaugh' kaartide topoloogia

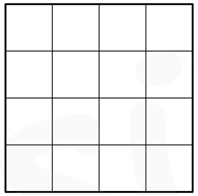
2–muutuja *Karnaugh' kaart* on tabel mõõtmetega **2 × 2** (või **1 × 4**) ruutu ;
3–muutuja *Karnaugh' kaart* on tabel mõõtmetega **2 × 4** = 8 ruutu ;
4–muutuja *Karnaugh' kaart* on tabel mõõtmetega **4 × 4** = 16 ruutu :
(2^4 = **16** rida on ka 4-muutuja loogikafunktsiooni tõeväärtustabelis)



2 - muutuja
Karnaugh' kaart



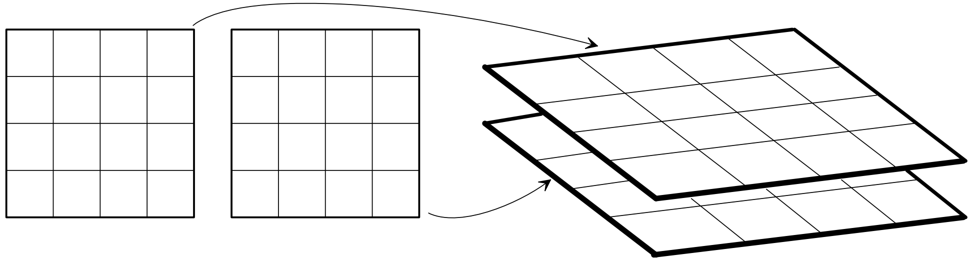
3 - muutuja
Karnaugh' kaart



4 - muutuja
Karnaugh' kaart

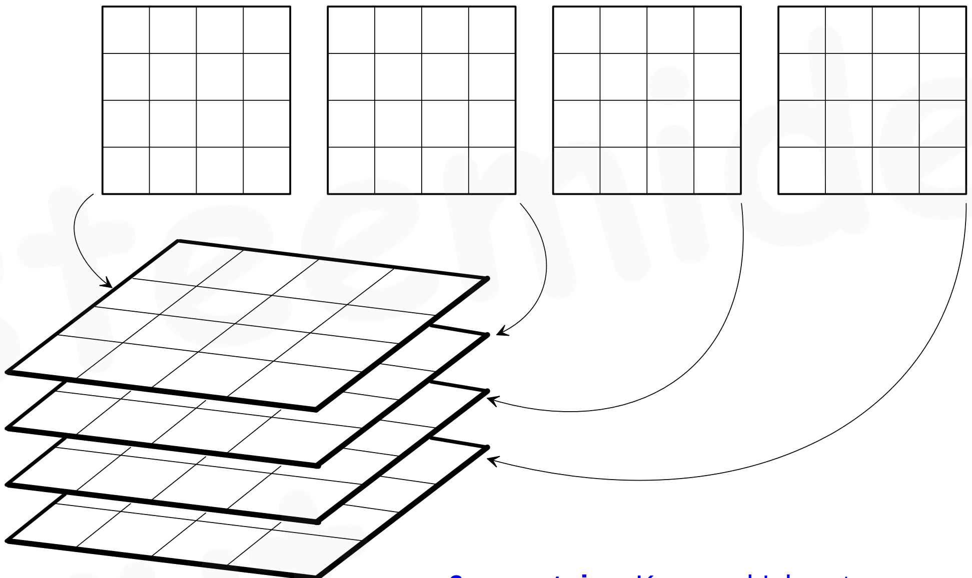
2– , **3**– ja **4–muutuja** kaardid on **2**–mõõtmelised ehk **tasandilised**.
5– ja **6–muutuja** kaardid on **3**–mõõtmelised ehk **ruumilised**.

5–muutuja Karnaugh' kaart on tabel mõõtmetega **2 × 4 × 4** = 32 ruutu :
(2^5 = **32** rida on ka 5-muutuja funktsiooni tõeväärtustabelis)



5 - muutuja Karnaugh' kaart

6–muutuja Karnaugh' kaart on tabel mõõtmetega **4 × 4 × 4** = 64 ruutu :
(2^6 = **64** rida on ka 6-muutuja funktsiooni tõeväärtustabelis)



6 - muutuja Karnaugh' kaart

Karnaugh' kaartide põhiomadused

Karnaugh' kaardil on **2 põhiomadust**.

1. põhiomadus

kaardi iga ruudu <u>naaberruutude arv</u> võrdub kaardi muutujate arvuga

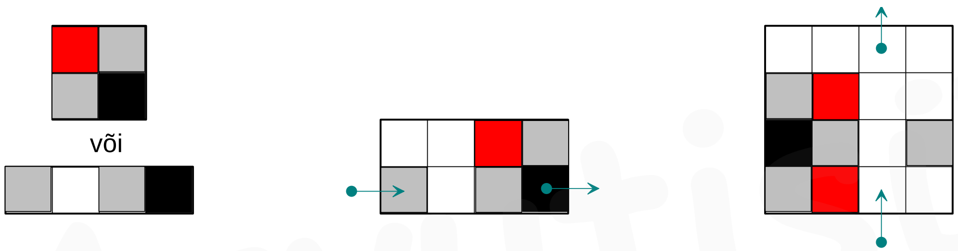
Seega:

2–muutuja Karnaugh' kaardi igal ruudul on **2** naaberruutu ;
3–muutuja Karnaugh' kaardi igal ruudul on **3** naaberruutu ;
4–muutuja Karnaugh' kaardi igal ruudul on **4** naaberruutu ;
5–muutuja Karnaugh' kaardi igal ruudul on **5** naaberruutu ;
6–muutuja Karnaugh' kaardi igal ruudul on **6** naaberruutu ;

? mitu **naaberruutu** oli eespool erinevate suurustega kaartidel **?**

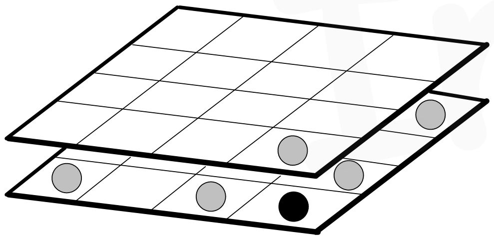
naaberruudud on <u>kõrvuti asuvad</u> ruudud kaardil ;
"*kokkupuutuvate nurkadega*" ehk *diagonaalselt* paiknevad ruudud —
e i o l e *naaberruudud* teineteisele.
Väljudes kaardilt mistahes suunas . . . toimub kohe kaardile taassisenemine üle v a s t a s k ü l j e :

. . . millised on **musta ruudu** *naaberruudud* kaardil ?

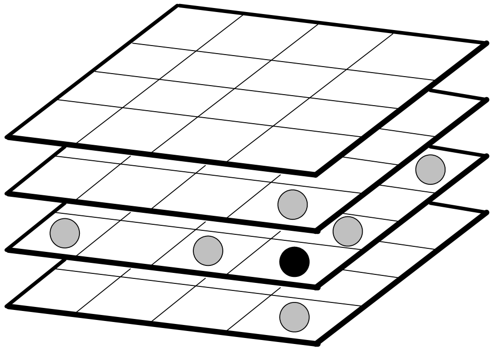


hallid ruudud on naaberruutudeks **mustale ruudule**
punased ruudud **EI OLE naaberruudud** **mustale ruudule**

2-mõõtmeline **Karnaugh' Kaart** moodustab
"k a t k e m a t u s i l i n d e r p i n n a"
nii *vertikaalselt* kui ka *horisontaalselt.*



ühe ruudu ●
5 naaberruutu ○
5-muutuja kaardil



ühe ruudu ●
6 naaberruutu ○
6-muutuja kaardil

6–muutuja kaart on suurim Karnaugh' kaart.
7–muutuja kaarti ei eksisteeri, sest 3–mõõtmelise ruumi võimalused on 6–muutuja kaardiga ammendatud ehk ruudu 7ndat naabrit pole ruumis enam kuhugi paigutada.

Argumentvektorite paiknemine kaardi ruutudes

Kaardi igale ruudule vastab tõeväärtustabeli üks rida ehk funktsiooni üks **argumentvektor** (milleks on mingi **n**–järguline **2nd**vektor).

2. põhiomadus

suvalise kahe naaberruudu argumentvektorid on teineteise <u>lähiskoodid</u>

(meenutame et, *lähiskoodid* on kahendvektorid, mis erinevad teineteisest **ainult ühes** oma kahendjärgus)

$x_1 \backslash x_2x_3$	00	01	11	10
0	**0** 000	**1** 001	**3** 011	**2** 010
1	**4** 100	**5** 101	**7** 111	**6** 110

3-muutuja Karnaugh' kaart

$x_1x_2 \backslash x_3x_4$	00	01	11	10
00	**0** 0000	**1** 0001	**3** 0011	**2** 0010
01	**4** 0100	**5** 0101	**7** 0111	**6** 0110
11	**12** 1100	**13** 1101	**15** 1111	**14** 1110
10	**8** 1000	**9** 1001	**11** 1011	**10** 1010

4-muutuja Karnaugh' kaart

! *tüüpiline viga:*

Karnaugh' kaardi ridade-veergude tähistused **ei ole** sellised :

(s.t. ei ole "2ndarvude kasvavas järjekorras")

$x_1 \backslash x_2x_3$	00	01	10	11
0				
1				

$x_1x_2 \backslash x_3x_4$	00	01	10	11
00				
01				
10				
11				

valesti märgitud tähistused

näide:

3-muutuja loogikafunktsiooni $f\,(x_1x_2x_3) = x_1\overline{x_2} \vee x_3$ tõeväärtustabel:

$x_1\,x_2\,x_3$	$x_1\overline{x_2} \vee x_3$
0 0 0	0
0 0 1	1
0 1 0	0
0 1 1	1
1 0 0	1
1 0 1	1
1 1 0	0
1 1 1	1

.... paikneb **3**-muutuja Karnaugh' kaardil:

$x_1 \backslash x_2x_3$	00	01	11	10
0	0	1	1	0
1	1	1	1	0

loogikamuutujate ja **argumentvektorite** paiknemine **5-muutuja** kaardil :

$x_1 = 0$

$x_2x_3 \backslash x_4x_5$	00	01	11	10
00	0 00000	1 00001	3 00011	2 00010
01	4 00100	5 00101	7 00111	6 00110
11	12 01100	13 01101	15 01111	14 01110
10	8 01000	9 01001	11 01011	10 01010

$x_1 = 1$

$x_2x_3 \backslash x_4x_5$	00	01	11	10
00	16 10000	17 10001	19 10011	18 10010
01	20 10100	21 10101	23 10111	22 10110
11	28 11100	29 11101	31 11111	30 11110
10	24 11000	25 11001	27 11011	26 11010

$x_1 = 0$

$x_1 = 1$

5-muutuja Karnaugh' kaart

(kolmemõõtmeline !)

loogikamuutujate ja **argumentvektorite** paiknemine **6-muutuja** kaardil :

$x_1x_2 = 00$

$x_3x_4 \backslash x_5x_6$	00	01	11	10
00	0 000000	1 000001	3 000011	2 000010
01	4 000100	5 000101	7	6
11	12	13	15 001111	14 001110
10	8 001000	9	11	10

$x_1x_2 = 01$

$x_3x_4 \backslash x_5x_6$	00	01	11	10
00	16 010000	17 010001	19	18
01	20	21	23	22
11	28	29	31 011111	30 011110
10	24 011000	25	27	26

$x_1x_2 = 11$

$x_3x_4 \backslash x_5x_6$	00	01	11	10
00	48 110000	49	51	50
01	52	53	55	54
11	60	61	63 111111	62 111110
10	56 111000	57	59	58

$x_1x_2 = 10$

$x_3x_4 \backslash x_5x_6$	00	01	11	10
00	32 100000	33 100001	35	34
01	36	37	39	38
11	44	45	47 101111	46 101110
10	40 101000	41	43	42

x_1x_2

0 0

0 1

1 1

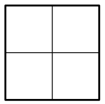
1 0

6-muutuja Karnaugh' kaart

(kolmemõõtmeline)

? . . . . aga kuidas paiknevad muutujad $x_1\,x_2$ **2-muutuja** kaardil **?**

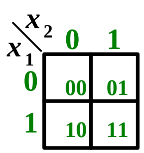
vaatame veelkord **2-muutuja** kaarte :



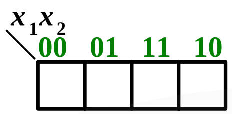
või

2 - muutuja
Karnaugh' kaart

2 - muutuja
Karnaugh' kaart



või

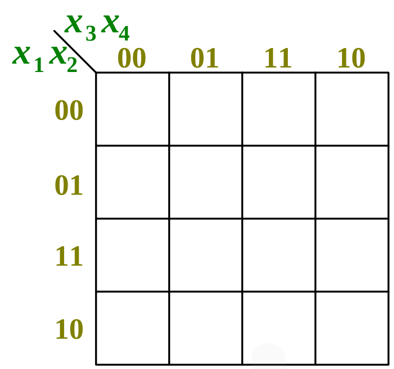


(2-muutuja kaart on praktikas ebaoluline)

. . . . niisiis on mingil eesmärgil kasulik tõeväärtustabel **ümber paigutada** sellisesse kindla formaadiga t a b e l i s s e ("kaardile") :

$x_1 x_2 x_3 x_4$	f
0 0 0 0	**1**
0 0 0 1	**1**
0 0 1 0	**0**
0 0 1 1	**1**
0 1 0 0	**0**
0 1 0 1	**0**
0 1 1 0	**0**
0 1 1 1	**1**
1 0 0 0	**0**
1 0 0 1	**1**
1 0 1 0	**1**
1 0 1 1	**0**
1 1 0 0	**0**
1 1 0 1	**1**
1 1 1 0	**0**
1 1 1 1	**1**

suvaline juhuslik **tõeväärtustabel**



	$x_1 x_2 x_3 x_4$	f
0	0 0 0 0	1
1	0 0 0 1	1
2	0 0 1 0	0
3	0 0 1 1	1
4	0 1 0 0	0
5	0 1 0 1	0
6	0 1 1 0	0
7	0 1 1 1	1
8	1 0 0 0	0
9	1 0 0 1	1
10	1 0 1 0	1
11	1 0 1 1	0
12	1 1 0 0	0
13	1 1 0 1	1
14	1 1 1 0	0
15	1 1 1 1	1

$x_1 x_2 \backslash x_3 x_4$	00	01	11	10
00	0	1	3	2
01	4	5	7	6
11	12	13	15	14
10	8	9	11	10

tõeväärtustabeli iga **rida / argumentvektor** . . . vastab kaardi ühele **ruudule**

$x_1 x_2 x_3 x_4$	f
0 0 0 0	1
0 0 0 1	1
0 0 1 0	0
0 0 1 1	1
0 1 0 0	0
0 1 0 1	0
0 1 1 0	0
0 1 1 1	1
1 0 0 0	0
1 0 0 1	1
1 0 1 0	1
1 0 1 1	0
1 1 0 0	0
1 1 0 1	1
1 1 1 0	0
1 1 1 1	1

$x_1 x_2 \backslash x_3 x_4$	00	01	11	10
00	1	1	1	0
01	0	0	1	0
11	0	1	1	0
10	0	1	0	1

suvaline juhuslik **tõeväärtustabel** paigutatud **Karnaugh' kaardile**

Kontuurid

Karnaugh' kaardil valitakse välja kindlate mõõtmetega r u u t u d e g r u p p e , mida nimetatakse **kontuurideks**.

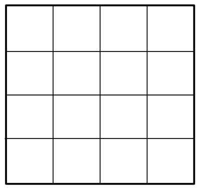
Tasandilise kaardi *kontuurid* on r i s t k ü l i k u d lubatud küljepikkustega

$2^{\text{täisarv}}$ ehk $\mathbf{2^m} \times \mathbf{2^n}$ ruutu.

2-mõõtmelise Karnaugh' kaardi kontuuride kõikvõimalikud suurused :

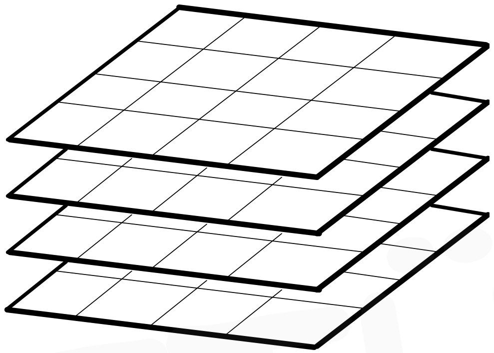
1 × 1 ruutu
1 × 2 ruutu
1 × 4 ruutu
2 × 2 ruutu
2 × 4 ruutu
4 × 4 ruutu

$\mathbf{2^m \times 2^n}$ **ruutu**

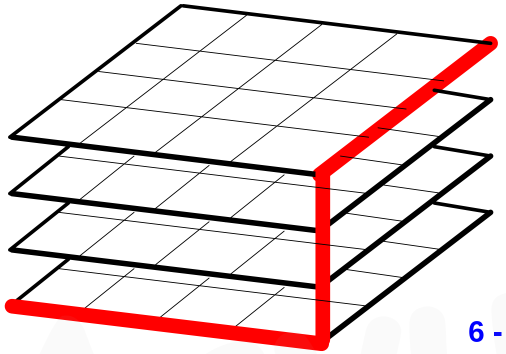


3-mõõtmelise Karnaugh' kaardi kontuurid on r i s t t a h u k a d võimalike suurustega :

1 × 1 × 1 ruutu
1 × 1 × 2 ruutu
1 × 1 × 4 ruutu
1 × 2 × 1 ruutu
1 × 2 × 2 ruutu
. . . .
4 × 4 × 4 ruutu



kuigi ka **8** = 2^n = 2^3 siis : ....

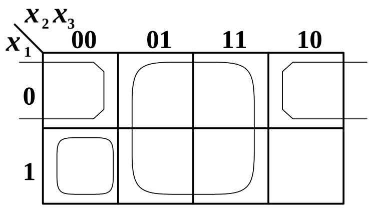


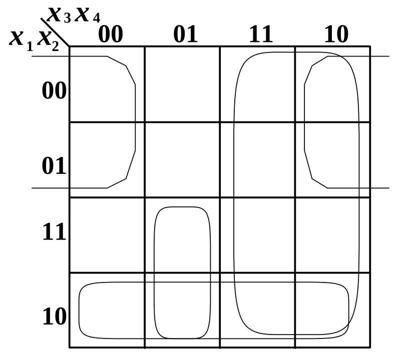
6 - muutuja Karnaugh' kaart :

kontuuri küljepikkus "8 ruutu" ei mahu isegi suurimale kaardile

Seega **ei ole** Karnaugh' kaardi kontuurideks ruutudegrupid küljepikkusega **3** ruutu. Ülejäänud võimalikud küljepikkused (mis üldse mahuvad kaardile) on kontuuridel lubatud.

Niisiis osutuvad k o n t u u r i d e võimalikeks k ü l j e p i k k u s t e k s :
1 **2** ja **4** ruutu:



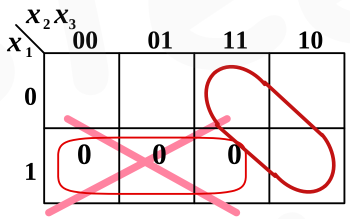


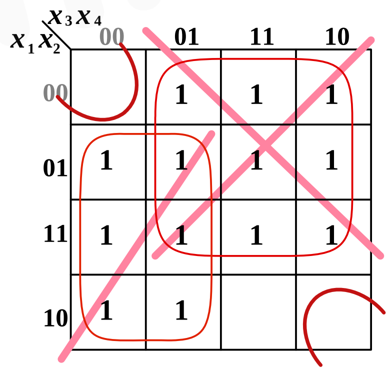
mõned suvalised näidis**kontuurid**
3-muutuja kaardil ja 4-muutuja kaardil

! *tüüpiline viga:*

kontuuri küljepikkus pole kunagi **3 ruutu !**

(s.t. kaardil ei tohi valida sellist kontuuri, mille mistahes küljepikkus on **3**)





valestivalitud "kontuurid"

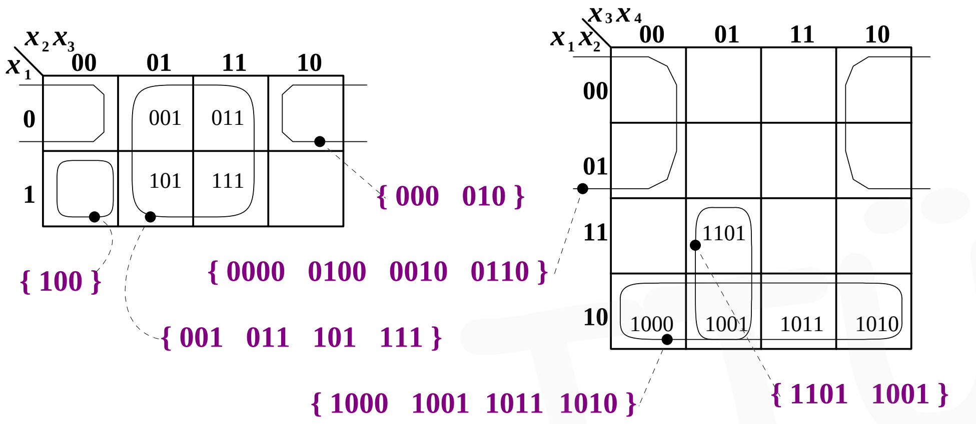
<u>diagonaalselt</u> paiknevad ruudud **pole kõrvuti** ja seega ei moodusta **kontuuri !**

Kontuuride seos intervallidega

meenutame :

2ndvektorite teatud kindlate tunnustega hulka nimetatakse **intervalliks**.

Karnaugh' kaardi **iga kontuur** vastab kahendvektorite mingile **intervallile**:



suvalised kontuurid ja nendele vastavad **intervallid**

vaadeldes suvalist kontuuri : mistahes kontuuri koosseisu kuuluvatele ruutudele vastavad **argumentvektorid** / **2nd**vektorid moodustavad **intervalli**.

Karnaugh' kaardi piirkonnad

kuna iga muutuja x_i saab omada kahte väärtust, siis **n**-muutuja kaardil on **2n** omavahel kattuvat **piirkonda** (ruutude gruppi):

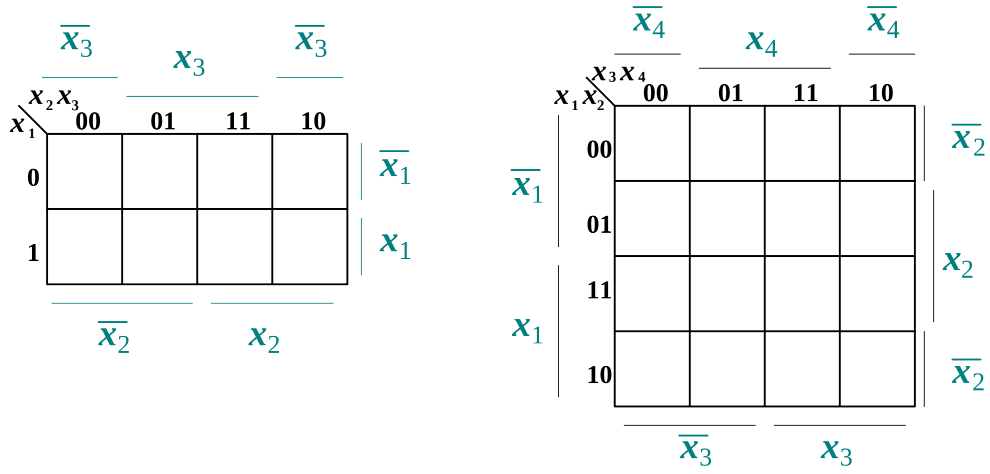
$x_1 = 0$ $\quad x_1 = 1$ $\quad x_2 = 0$ $\quad x_2 = 1$ $\quad \ldots\ldots$ $\quad x_n = 0$ $\quad x_n = 1$

kaardi piirkondi võib tähistada vastavalt:

$\bar{x}_1$ $\quad x_1$ $\quad \bar{x}_2$ $\quad x_2$ $\quad \ldots\ldots\ldots\ldots$ $\quad \bar{x}_n$ $\quad x_n$

Järgmisel joonisel on näidatud **3**-muutuja kaardi kõik **6 piirkonda** (igaühe suurus on 4 ruutu) ja

4-muutuja kaardi kõik **8 piirkonda** (kus iga piirkond on 8-ruuduline):



Karnaugh' kaardi **piirkonnad**

Piirkondade suurus

Iga *piirkond* on täpselt **"pool kaarti"** **suur** ehk tema koosseisu kuuluvad (suvalise kaardi korral) täpselt **pooled** kaardi kõikidest ruutudest.

Piirkonnad kattuvad omavahel.

Kaardi **iga ruut** kuulub **pooltesse** selle kaardi *piirkondadesse*

Loogikafunktsioonide minimeerimine

Loogikafunktsiooni *minimeerimine* on tema esitamine *minimaalse keerukusega* (ehk *algtermide* vähima võimaliku arvuga) normaalkujul :

Minimaalsel Disjunktiivsel NormaalKujul (MDNK)

või **Minimaalsel Konjunktiivsel NormaalKujul** (MKNK)

Funktsioone oleme seni minimeerinud nende avaldise t e i s e n d a m i s e g a *loogikaalgebra põhiseoseid* ja *loogikatehete asendusseoseid* kasutades.

Loogikafunktsiooni minimeerimine KARNAUGH' KAARDI abil

Loogikafunktsiooni minimeerimine on Karnaugh' kaardi põhiline rakendusvaldkond.

Karnaugh' kaart on kõige eelistatum minimeerimisvahend, kuid ta on rakendatav ainult kuni **6**-muutuja loogikafunktsioonide $f(x_1 \ldots x_6)$ korral

OSALISELT määratud loogikafunktsioon

(meie senised kõik loogikafunktsioonid on olnud **täielikult** määratud)

Loogikafunktsioon on *osaliselt määratud* kui osade argumentvektorite jaoks on jäetud lahtiseks, kumba loogikaväärtuse **0** / **1** peab funktsioon nende korral omandama.

Sellised argumentvektorid on funktsiooni **määramatuspiirkonnaks**.

Seega võib loogikafunktsioonidel olla olemas **3 piirkonda** :

0-de piirkond

1-de piirkond

määramatuspiirkond — kus väärtus tohib olla "ükspuha" kumb, kas **1** või **0**

mida tehakse **määramatuspiirkonnaga** ?

määramatuspiirkond "*määratakse alati lõpuni*" ehk jaotatakse ära **0**-de ja **1**-de piirkonna vahel

ehk teiste sõnadega:

osaliselt määratud funktsioonilt minnakse alati üle **täielikult määratud** funktsioonile.

Loogikafunktsiooni võib "lõpuni määrata" ka meelevaldselt / juhuslikult, kuid enamasti tasub seda teha sihipäraselt — misjuhul saavutame talle "esindajaks" **lihtsaima** võimaliku loogikaavaldise.

Olles "määranud lõpuni" mingi *osaliselt määratud* funktsiooni, oleme talle valinud esindajaks ühe *täielikult määratud* funktsiooni .

Täielikult määratud funktsioon on vaadeldav **osaliselt** määratud funktsiooni erijuhtumina, kus *määramatuspiirkond* puudub.

Loogikafunktsiooni NUMBRILINE 10ndESITUS

10ndesitus on loogikafunktsiooni kompaktne esitusviis, kus tõeväärtustabel mahutatakse ära "*ühele reale*" (võttes appi **10nd**arvud)

Funktsiooni kolmest võimalikust *piirkonnast* :

0

1

määramatus seda tähistatakse tõeväärtustabelis *kriipsuga* : —

. . . . näidatakse **10nd**esituses ära tavaliselt **2 piirkonda** (kolmest)

3-muutuja funktsiooni 10ndesitus sisaldab 10ndarve **0** **7**

4-muutuja funktsiooni 10ndesitus sisaldab 10ndarve **0** **15**

5-muutuja funktsiooni 10ndesitus sisaldab 10ndarve **0** **31**

. . . . ehk üldiselt :

n-muutuja funktsiooni **10nd**esitus sisaldab 10ndarve **0** . . . . ($2^n - 1$)

ülesanne:

Leida **Karnaugh' kaardiga** **MDNK** ja **MKNK** (osaliselt määratud) 4-muutuja loogikafunktsioonile:

$$f(x_1 \ldots x_4) = \prod (1,\ 4,\ 5,\ 9,\ 11,\ 12,\ 13,\ 15)_0 \quad (3,\ 14)_{-}$$

Tuvasta, kas leitud *normaalkujud* on **omavahel** loogiliselt **võrdsed** :

ehk kas **MDNK** = **MKNK** ?

. . . . kanname **10nd**esituse *4-muutuja Karnaugh' kaardile* :