# HULGAD
## Hulgaaritmeetilised tehted
## Hulgaalgebra ( **Cantor**'i **algebra** )

. . . . **Hulk** on koosvaadeldavate hulga**elementide** kogum . . . .

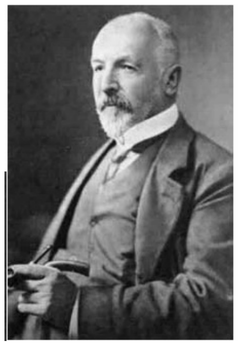
( hulk koosneb **elementidest** )

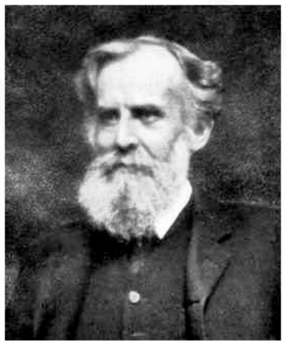
Hulgas ei ole <u>korduvaid</u> elemente: igat hulgaelementi on "**1 tk**."

**Hulkade** jaoks on defineeritud **5** hulgaaritmeetilist tehet.
1 *unaarne* ja 4 *binaarset* tehet :

| tehte NIMI | formaalne tähistus |
|---|---|
| hulga **täiend** | $\overline{A}$ |
| hulkade **ühend** ( hulkade **liitmine** ) | $A \cup B$ |
| hulkade **ühisosa** ( hulkade **korrutamine** ) | $A \cap B$ |
| hulkade **vahe** ( hulkade **lahutamine** ) "A *ilma* B-ta" | $A \setminus B$ |
| hulkade **sümmeetriline vahe** | $A \vartriangle B$ |

Hulgatehete tulemuseks on samuti **hulk**.

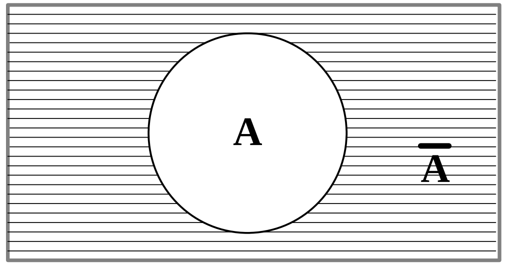




Georg **Cantor** (1845 — 1918) John **Venn** (1834 — 1923)

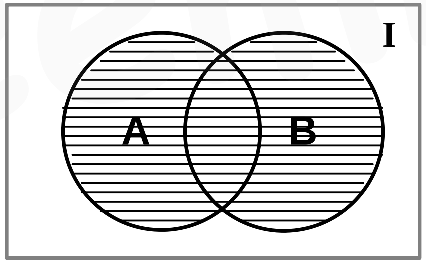
## Venni diagrammid

Visuaalse illustreerimise hea vahend hulkade jaoks.
Venni diagrammi saab koostada kuni **4** hulga jaoks.
Hulga**tehete** tulemuseks olev hulk viirutatuna **Venni diagrammidel** :




hulga A **täiend** $\overline{A}$

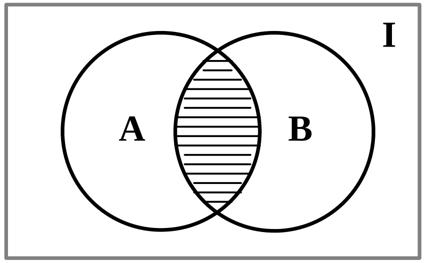
( **täiend** on alati *universaalhulgani* )




$A \cup B$

hulkade **ühend**

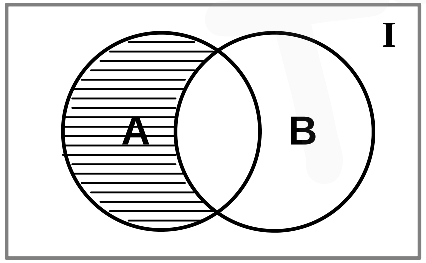
A ja B on **liidetud**




**A ∩ B**

hulkade **ühisosa**

A ja B on **korrutatud**




**A \ B**

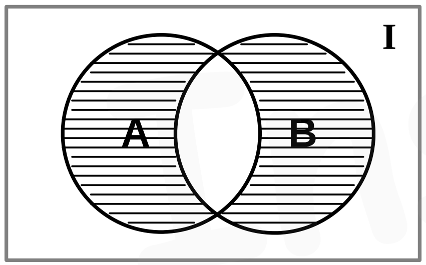
hulkade **vahe**

hulgast A on **lahutatud** hulk B

" ***A ilma B**-ta* "

**A\B** ≠ **B\A** ehk hulkade lahutamine **pole** k o m m u t a t i i v n e
(oleneb operandide järjekorrast)

ainus *mittekommutatiivne* (binaarne) hulgatehe.




**A ∆ B**

hulkade **sümmeetriline vahe**

**Hulgaalgebra** ( *Cantor'i algebra* ) sisaldab **3** tehet : $\overline{\phantom{A}}$ ∪ ∩

*meenutame :* Loogikaalgebra ( *Boole' i algebra* ) sisaldab : $\overline{\phantom{A}}$ ∨ ∧

**hulga**algebra ja **loogika**algebra on sarnased ("isomorfsed")

**teineteisele VASTAVAD** mõisted (tehted, loogikaväärtused ja hulgad) :

| loogikas | | hulkades | |
|---|---|---|---|
| **inversioon** | $\overline{A}$ | **täiend** | $\overline{A}$ |
| **konjunktsioon** | ∧ | **ühisosa** | ∩ |
| **disjunktsioon** | ∨ | **ühend** | ∪ |
| . . . ei oma **loogikas** vastavat tehet . . . | | **lahutamine** e. **vahe** | \ |
| **summa mooduliga 2**<br>**välistav VÕI** ( **XOR** ) | ⊕ | **sümmeetriline vahe** | ∆ |
| **konstant** | **0** | **tühi hulk** | ∅ või **{ }** |
| **konstant** | **1** | **universaalhulk** | **I** |

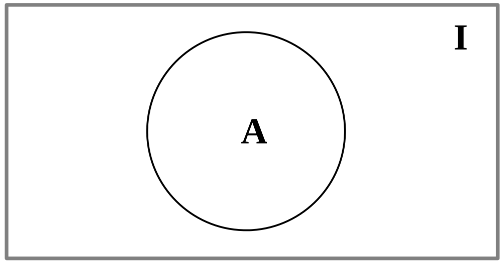
Hulgatehete prioriteet: $\overline{\phantom{A}}$ ∩ ∪ \ ∆

## HULGAALGEBRA PÕHISEOSED

meile tuttavad **loogikaalgebra põhiseosed** muutuvad **hulgaalgebra põhiseosteks**, kui nendes teha eelnevalt näidatud vastavad asendused.

esineb **duaalsus** :

Ka *hulgaavaldiste* jaoks leiduvad *duaalsed* hulgaavaldised ja kehtib *duaalsusprintsiip*.



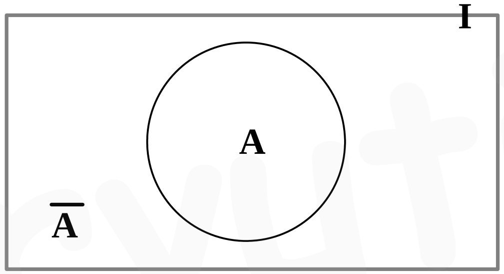

**ühe hulga** Venni diagramm

## HULGAALGEBRA PÕHISEOSED

$A = \overline{\overline{A}}$ $\qquad \overline{I} = \varnothing$ $\qquad \overline{\varnothing} = I$

$A \cup \varnothing = A$ $\qquad A \cap I = A$

$A \cup I = I$ $\qquad A \cap \varnothing = \varnothing$




$A \cap \overline{A} = \varnothing$ $\qquad A \cup \overline{A} = I$

**idempotentsus:**

$A \cup A = A$ $\qquad A \cap A = A$

**kommutatiivsus:**

$A \cup B = B \cup A$ $\qquad A \cap B = B \cap A$

*verbaalsel kujul*: ". . . . **tehte** tulemus ei olene **operandide** järjekorrast . . . "

**assotsiatiivsus:**

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

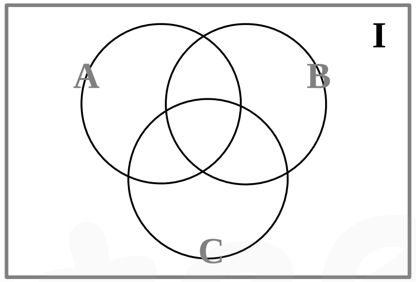
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

*verbaalsel kujul*: ". . . . **avaldise** tulemus ei olene **tehete** järjekorrast . . . . "

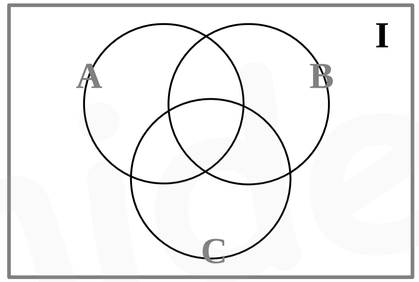
**distributiivsus:** ( *sulgude "lahtikorrutamine" ja "lahtiliitmine"* )

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

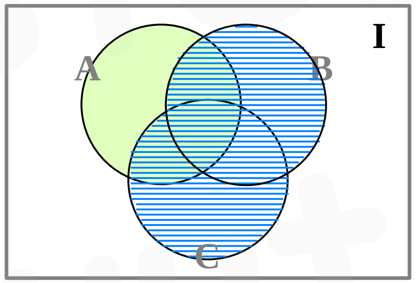
3 hulga **Venni diagramm** : kontrollime *distributiivsuse* kehtimist :



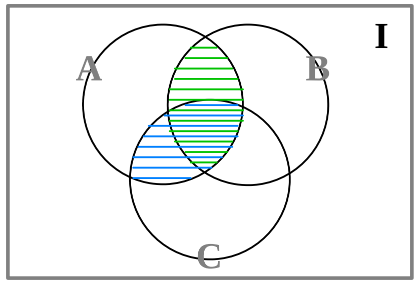

$A \cap (B \cup C)$




$(A \cap B) \cup (A \cap C)$




$A \cap (B \cup C)$




$(A \cap B) \cup (A \cap C)$

mõlemad hulgaavaldised määravad diagrammil **sama piirkonna** (võrdsed avaldised)

eelmise suhtes *duaalne* distribiivsusseadus ehk "*sulgude lahtiliitmine*" :

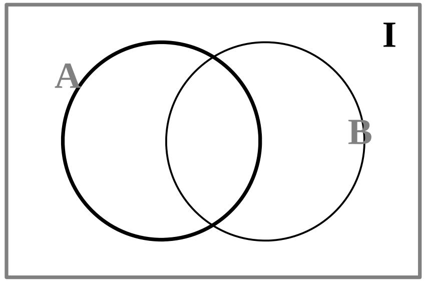
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

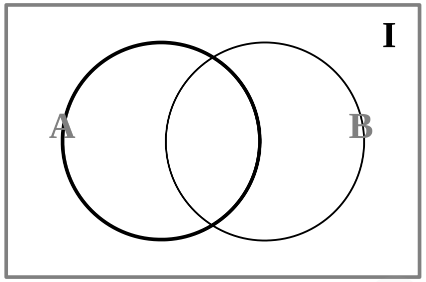
*distributiivsusseadus* "tagurpidi": võimaldab <u>tuua ühist tegurit sulgude ette</u>

**neeldumine:**

$A \cap (A \cup B) = A$ $\qquad A \cup (A \cap B) = A$

2 hulga **Venni diagramm** :



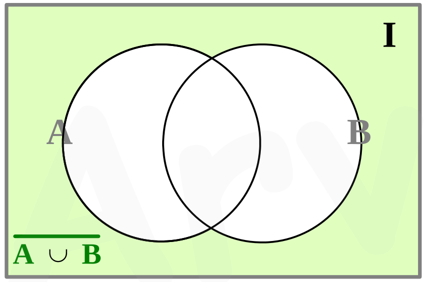

**neeldumine:**

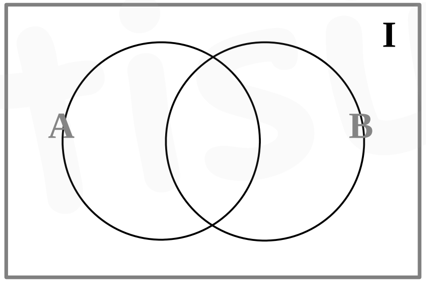
$$\mathbf{A} \cap (\overline{\mathbf{A}} \cup \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cap \mathbf{B}$$

$$\mathbf{A} \cup (\overline{\mathbf{A}} \cap \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cup \mathbf{B}$$

**DeMorgani seadused** (kahe hulga jaoks):

$$\overline{\mathbf{A} \cup \mathbf{B}} = \overline{\mathbf{A}} \cap \overline{\mathbf{B}} \qquad \overline{\mathbf{A} \cap \mathbf{B}} = \overline{\mathbf{A}} \cup \overline{\mathbf{B}}$$



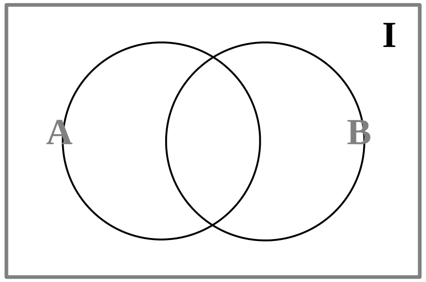

**kleepimine:**

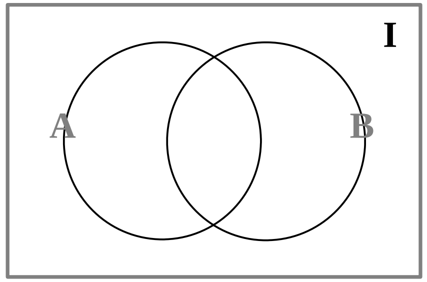
$$\mathbf{A} = (\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) \cap (\mathbf{A} \cup \overline{\mathbf{B}}) \qquad \mathbf{A} = (\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) \cup (\mathbf{A} \cap \overline{\mathbf{B}})$$

**Hulgaaritmeetilised asendusseosed**

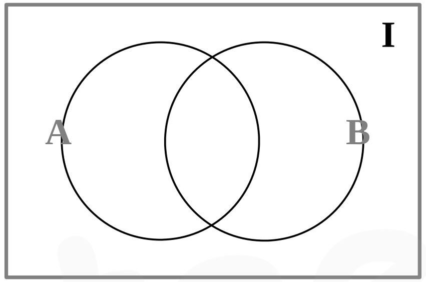
**Asendusseosed** võimaldavad asendada hulgatehteid $\setminus$ ja $\Delta$ hulgaalgebrasse kuuluvate tehete $\bar{\ }$ $\cap$ $\cup$ kaudu:

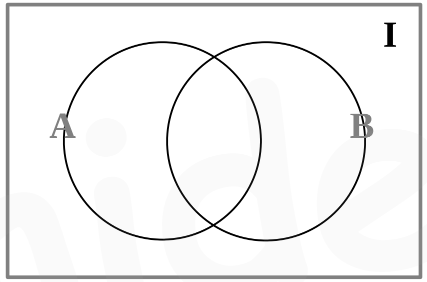
$$\mathbf{A} \setminus \mathbf{B} = \mathbf{A} \cap \overline{\mathbf{B}}$$



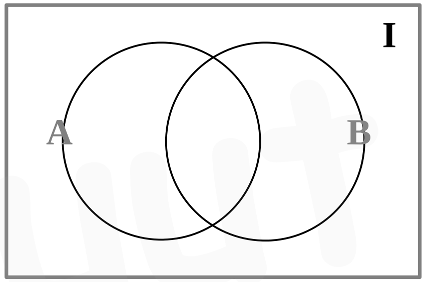

järeldub tehte $\Delta$ definitsioonist: $\mathbf{A} \,\Delta\, \mathbf{B} = (\mathbf{A} \setminus \mathbf{B}) \cup (\mathbf{B} \setminus \mathbf{A})$

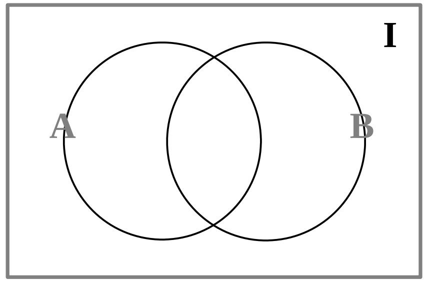



alternatiivne *asendusseos* tehtele $\Delta$ :

$$\mathbf{A} \,\Delta\, \mathbf{B} = (\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) \setminus (\mathbf{A} \cap \mathbf{B})$$




*ülesanne :*

On antud hulgad :

$\mathbf{A} = \{a\ b\ c\ d\ e\}$ $\qquad$ $\mathbf{B} = \{a\ b\ c\ d\ e\ f\ g\ h\}$

Leida $A \cup B$ $A \cap B$ $A \setminus B$ $B \setminus A$ $B \,\Delta\, A$

$A \cup B = \{a\ b\ c\ d\ e\ f\ g\ h\} = B$

$A \cap B = \{a\ b\ c\ d\ e\} = A$

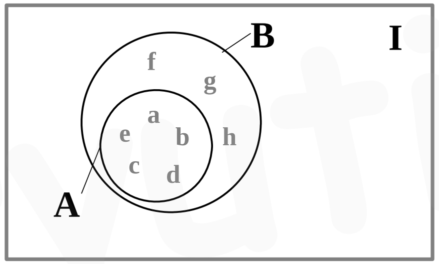
$A \setminus B = \{\ \}$

$B \setminus A = \{f\ g\ h\}$

$B \,\Delta\, A = B \setminus A$

seda saab järeldada ka **asendusseose** abil / kaudu, mis meie erijuhtumil :

$A \,\Delta\, B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \varnothing \cup (B \setminus A) = B \setminus A$




vaadeldud hulkade **Venni diagramm**

siin : hulk **A** on hulga **B** **osahulk / alamhulk** : $A \subset B$

*ülesanne :*

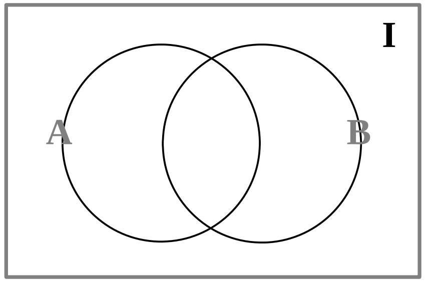
Leida $A \cap B$ ja leida hulk **A** ja hulk **B** kui :

$A \setminus B = \{1, 5, 7, 8\}$

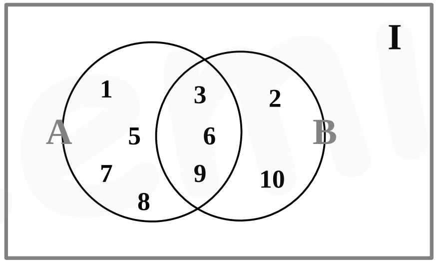
$B \setminus A = \{2, 10\}$

$A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

võtame appi **2** hulga **Venni diagrammi** :




ilmneb, et : $A \cap B = \{3\ 6\ 9\}$




$A = \{1\ 3\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\}$

$B = \{2\ 3\ 6\ 9\ 10\}$

*ülesanne :*

Mida saab ütelda hulkade **A** ja **B** kohta järgneval viiel juhul ehk millisel erijuhtumil / tingimusel iga konkreetne võrdus kehtib :
( kuidas peavad **A** ja **B** paiknema teineteise suhtes )

$A \cup B = A$

$A \cap B = A$

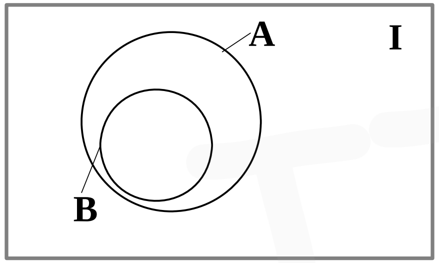
$A \setminus B = A$

$A \cap B = B \cap A$

$A \setminus B = B \setminus A$

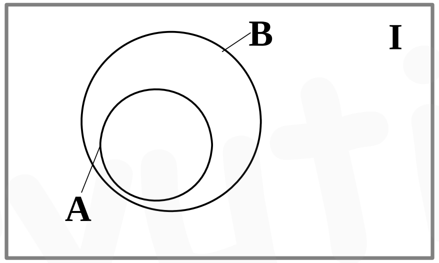
"**A** *või* **B** *on tühi hulk*" oleks triviaalne lahend; seda me ei pea vastuseks.
Otsime selliseid erijuhtumeid, kus hulgad A ja B on mõlemad **mittetühjad** ja vaadeldav võrdus kehtib ikkagi

$\mathbf{A \cup B = A}$ ( millal kehtib ? )



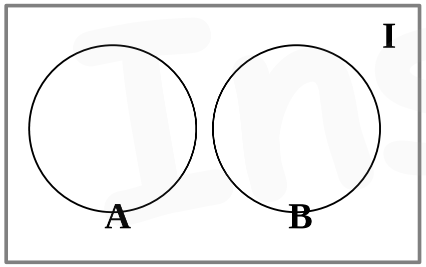

. . . kehtib siis kui $\mathbf{B \subset A}$

$\mathbf{A \cap B = A}$ ( millal kehtib ? )




. . . kehtib siis kui $\mathbf{A \subset B}$

$\mathbf{A \setminus B = A}$ ( millal kehtib ? )

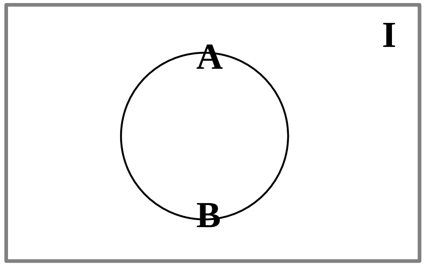



. . . kehtib siis kui $\mathbf{A \cap B = \varnothing}$

$\mathbf{A \cap B = B \cap A}$ ( millal kehtib ? )

selline võrdus **kehtib alati** : *kommutatiivsus*
selle võrduse kehtimine ei anna mingit infot hulkade **A** ja **B** kohta

$\mathbf{A \setminus B = B \setminus A}$ ( millal kehtib ? )




. . . kehtib siis kui $\mathbf{A = B}$

## Hulgaaritmeetiliste avaldiste TEISENDUSED

Hulgaavaldis teisendatakse *hulgaalgebra põhiseoste* ja *hulgatehete asendusseoste* abil lihtsamale / lühemale, kuid esialgsega samaväärsele kujule.
Teisenduse eesmärgiks võib olla hulgaavaldise viimine *Cantori normaalkujule.* ( DNK ja KNK analoogid hulgaavaldiste jaoks )
Hulgaavaldise *Cantori normaalkuju* on
**ühendite ühisosa** või **ühisosade ühend**

*ülesanne :*

Lihtsusta hulgaavaldis :

$$[\,(\mathbf{A} \setminus \mathbf{B}) \cup (\mathbf{A} \,\triangle\, \mathbf{B}) \cup (\mathbf{A} \setminus \mathbf{C})\,] \cap \overline{\mathbf{A}} =$$

. . . . teisendamisel alati **asendame** tehted $\Delta$ ja $\setminus$ :

$$= [\,(A \setminus B) \cup (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \setminus C)\,] \cap \overline{A} =$$

$$= [\,(A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{C})\,] \cap \overline{A} =$$

$$= (A \cap \overline{B} \cap \overline{A}) \cup (B \cap \overline{A} \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{C} \cap \overline{A}) =$$

$$= B \cap \overline{A} \cap \overline{A} =$$

$$= B \cap \overline{A}$$

*pane tähele :*

olles jõudnud avaldisekujuni :

$$\ldots\ldots = [\,(A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \setminus C)\,] \cap \overline{A} = \ldots\ldots$$

. . . . võib nurksulud ka kohe järgmisena **lahtikorrutada** .
kuna $A \setminus B$ kui ka $A \setminus C$ on hulga $A$ **osahulgad**, siis on äratuntav et :

$$(A \setminus B) \cap \overline{A} = \varnothing$$

$$(A \setminus C) \cap \overline{A} = \varnothing$$

. . . . misjuhul jääb avaldises alles ainult korrutis :

$$(B \setminus A) \cap \overline{A}$$

*iseseisvaks lahendamiseks :*

Teisenda eelnevat avaldist :

$$[\,(A \setminus B) \cup (A \vartriangle B) \cup (A \setminus C)\,] \cap \overline{A} =$$

. . . . kasutades tehte $\Delta$ teist võimalikku *asendusseost* :

$$A \vartriangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

. . . . edukal teisendamisel peab tulema sama tulemus :

$$\ldots\ldots = B \cap \overline{A}$$

*ülesanne :*

Lihtsusta hulgaavaldis :

$$A \cup (C \setminus A) \cup (A \cap B \cap C) =$$

$$= A \cup (C \cap \overline{A}) \cup (A \cap B \cap C) =$$

$$= (A \cup C) \cap (A \cup \overline{A}) \cup (A \cap B \cap C) =$$

$$= (A \cup C) \cup (A \cap B \cap C) =$$

$$= A \cup C \cup (A \cap B \cap C) =$$

$$= A \cup C$$

*ülesanne :*

Lihtsusta hulgaavaldis :

$(A \cap C) \cup (B \cap C) \cup (A \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap B \cap C) =$

. . . . etteantud avaldis on juba **Cantor**'i **normaalkuju** . . . .

$= A \cap (C \cup \overline{C}) \cup (B \cap C) \cup (\overline{A} \cap B \cap C) =$

$= A \cup (B \cap C) \cup (\overline{A} \cap B \cap C) =$

$= A \cup (B \cap C)$

*ülesanne :*

Lihtsusta hulgaavaldis :

$$\overline{\overline{(A \setminus B)} \cap \overline{(B \setminus C)}} \cup \overline{(C \setminus A)} =$$

$$= \overline{\overline{(A \setminus B)}} \cup \overline{\overline{(B \setminus C)}} \cup \overline{(C \setminus A)} =$$

$$= (A \setminus B) \cup (B \setminus C) \cup \overline{(C \cap \overline{A})} =$$

$$= (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{C}) \cup (\overline{C} \cup \overline{\overline{A}}) =$$

$$= (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{C}) \cup \overline{C} \cup A =$$

$$= \overline{C} \cup A$$

*ülesanne :*

Tõesta hulgaavaldiste võrduse kehtivus :

$$A \triangle (A \cap B) = A \setminus B$$

. . . . teisendame / lihtsustame võrduse **vasakut** poolt :

$$A \triangle (A \cap B) = [A \setminus (A \cap B)] \cup [(A \cap B) \setminus A] =$$

$$= [A \cap \overline{(A \cap B)}] \cup [(A \cap B) \cap \overline{A}] =$$

$$= [A \cap (\overline{A} \cup \overline{B})] \cup [A \cap B \cap \overline{A}] =$$

$$= A \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) =$$

$$= (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{B}) =$$

$$= A \cap \overline{B} =$$

$$= A \setminus B$$

*iseseisvaks lahendamiseks :*

Teisenda eelneva võrduse vasaku poole avaldist $A \vartriangle (A \cap B)$ veelkord, kasutades teist võimalikku *asendusseost* :

$$A \vartriangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

. . . . edukal teisendamisel peab tulema sama tulemus :

$$. . . . . = A \cap \overline{B} = A \setminus B$$

*ülesanne :*

Tõesta hulgaavaldiste võrduse kehtivus :

$$(A \setminus B) \cap (C \setminus D) = (A \cap C) \setminus (B \cup D)$$

. . . . valime, kas teisendame võrduse **vasakust** või **paremast** poolest alates (võrduse teiseks pooleks) . . . . no valime näiteks **vasaku** :

$$(A \setminus B) \cap (C \setminus D) = (A \cap \overline{B}) \cap (C \cap \overline{D}) =$$

$$= A \cap \overline{B} \cap C \cap \overline{D} =$$

$$= A \cap C \cap \overline{B} \cap \overline{D} =$$

$$= A \cap C \cap \overline{B \cup D} =$$

$$= A \cap C \setminus B \cup D =$$

$$= (A \cap C) \setminus (B \cup D)$$

oleks võinud ka "vastupidi suunas" teisendada:
võrduse **parema** poole avaldis **vasaku** poole avaldiseks

*iseseisvaks lahendamiseks :*

Kontrolli suvalisel viisil (hulgaavaldise teisenduse teel või Venni diagrammide võrdlemise teel) , millised järgnevad võrdused **kehtivad** ? :

$$A \setminus (A \setminus B) = A \cup B$$

$$A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$$

$$A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$$

$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$$

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$$

$$(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$$

$$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$$

*vastus:*

$A \setminus (A \setminus B) \neq A \cup B$ ( . . . . võrdus ei kehti )

$A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$ ( . . . . kehtib )

$A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$ ( . . . . kehtib )

$A \setminus (B \cap C) \neq (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ ( . . . . võrdus ei kehti )

$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ ( . . . . kehtib )

$(A \cap B) \setminus C \neq (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$ ( . . . . võrdus ei kehti )

$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$ ( . . . . kehtib )